GEOMETRIE PLANE: ETUDE METRIQUE

Table des matières

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $I \to \mathbb{R}^2$.
- On note x et y les fonctions coordonnées de f.
- En résumé, on a donc $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t),y(t)) \end{array}}$.

  On notera $M(t)$ ou M_t le point du plan de coordonnées $(x(t),y(t))$.
- On dit que (I,f) est un arc paramétré de classe C^k lorsque f est une fonction de classe C^k sur I.
- On appelle support de la courbe paramétrée et on note Γ l'ensemble des points $M(t)$ avec $t \in I$:
$$\boxed{\Gamma = \{M(t) = (x(t),y(t)) | t \in I\}}$$
- On munira le plan d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$

  ainsi $\boxed{\overrightarrow{OM(t)} = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j}}$ et $\boxed{M(t) = O + x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j}}$

1 Rappels

- **éq. param. d'une droite connaissant un point** $A(x_A,y_A)$ **et un vecteur directeur** $\vec{d}=(d_1,d_2)$
  La représentation la plus simple est $\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \lambda & \longmapsto & A+\lambda.\vec{d} \end{array}}$

- **éq. cart. d'une droite** (D) **connaissant un point** $A(x_A,y_A)$ **et un vecteur directeur** $\vec{d}=(d_1,d_2)$
  Soit M le point de coordonnées génériques (x,y). On a les équivalences :
  $$\boxed{M(x,y)\in(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{d} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{d})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & d_1 \\ y-y_A & d_2 \end{vmatrix}=0}$$
  et donc on a comme équation de $\boxed{(D)\ :\ d_2(x-x_A)-d_1(y-y_A)=0}$

- **équ. cart. d'une droite** (D) **connaissant un point** $A(x_A,y_A)$ **et un vecteur normal** $\vec{n}=(n_1,n_2)$
  Soit M le point de coordonnées génériques (x,y). On a les équivalences :
  $$\boxed{M(x,y)\in(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux } \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}=0}$$
  et donc on a comme équation de $\boxed{(D)\ :\ n_1(x-x_A)+n_2(y-y_A)=0}$

définition 1: point régulier, stationnaire, singulier

Soit (I,f) une courbe paramétrée et $t_0\in I$.

- On dit que le point $\mathrm{M(t_0)}$ est un point régulier de (I,f) lorsque $\vec{f}'(t_0)=x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}\neq\vec{0}$.
  Dans le cas contraire, on dit que le point $\mathrm{M(t_0)}$ est un point stationnaire ou singulier.
- Si tous les points de la courbe sont réguliers , on dit que la courbe est régulière
- On dit que le point $M(t_0)$ est un point birégulier de (I,f) lorsque la famille $(\vec{f}'(t_0),\vec{f}''(t_0))$ est libre.
  (si un point est birégulier alors il est forcément régulier)

remarque 1

- *La droite tangente à Γ en un point $M(t_0)$ est la droite passant par* $\mathrm{M(t_0)}$ *et dirigée par le premier vecteur dérivé non nul. En particulier, si* $\mathrm{M(t_0)}$ *est un point régulier alors la droite tangente au point* $\mathrm{M(t_0)}$ *est dirigée par le vecteur $f'(t_0)=M'(t_0)$:*
  - *une équation paramétrique de cette tangente est* $\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \lambda & \longmapsto & \mathrm{M(t_0)}+\lambda.M'(t_0) \end{array}}$
  - *une équation cartésienne de cette tangente est* $\boxed{\begin{vmatrix} x-x(t_0) & x'(t_0) \\ y-y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix}=0}$
- *le point $M(t_0)$ est un point régulier ssi $||f'(t_0)||\neq 0$*
- *on utilise (aussi) la notation différentielle dans ce chapitre.*

$$\boxed{f'(t_0)=M'(t_0)=\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)} \qquad \boxed{f''(t_0)=M''(t_0)=\frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}(t_0)}$$

2 Propriétés métriques des courbes planes paramétrées

On considère (I,f) un arc paramétré régulier de classe C^k, où $k \geqslant 1$. On note Γ son support.

2.1 Changement de paramètre

On sait qu'un ensemble de points peut être paramétré de plusieurs manières.

exemple 1: apparition de points singuliers

- Considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [-\pi, +\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (R\cos t, R\sin t) \end{array}}$

  On reconnait une paramétrisation régulière (c'est à dire sans points stationnaires) du cercle de centre O et de rayon R, notons le Γ

  On a $(x'(t),y'(t)) = f'(t) = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = (-R\sin t, R\cos t) = R(-\sin t, \cos t) \neq \vec{0}$
- Le changement de paramètre $t = \theta^2$ avec $\theta \in [-\sqrt{\pi}, +\sqrt{\pi}]$ fournit une autre paramétrisation de Γ. Il s'agit de la courbe paramétrée

$$\boxed{\begin{array}{rcl} g : [-\sqrt{\pi}, +\sqrt{\pi}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & (R\cos(\theta^2), R\sin(\theta^2)) \end{array}}$$

  On a $g'(\theta) = 2R\theta(-\sin(\theta^2), \cos(\theta^2))$ et de ce fait le point $g(0) = (R,0)$ est un point singulier! Ainsi $([-\sqrt{\pi}, +\sqrt{\pi}], g)$ n'est pas une paramétrisation régulière de Γ.
- Une paramétrisation régulière de Γ est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} h :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & (R\cos(\ln u), R\sin(\ln u)) \end{array}}$$

- D'une manière générale pour ne pas faire apparaître de points singuliers lorsque l'on effectue un changement de paramétrisation il suffit de considérer une fonction dont la dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle considéré:
  i) La fonction $\theta \mapsto \theta^2$ a sa dérivée qui s'annule en 0
  ii) La fonction ln n'a pas sa dérivée qui s'annule!
- très souvent en géométrie, on préférera utiliser **la notation différentielle**: elle a l'avantage de limiter le nombre des fonctions et de rendre plus "intuitive" les formules de dérivations.
- dans l'exemple précédent, suivant que Γ est paramétré par t, θ ou u,
  on note le point courant $M(t), M(\theta)$ ou $M(u)$,
  et donc les dérivées premières sont notées respectivement
  $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t), \dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta)$ et $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{du}(u)$ ou plus simplement $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}, \dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}$ et $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{du}$
- on a vu qu'en posant $t = \theta^2$ on avait $f(t) = f(\theta^2) = g(\theta)$.
  En dérivant par rapport à θ cela donne $g'(\theta) = 2\theta.f'(\theta^2) = 2\theta.f'(t)$
  La notation différentielle permet d'écrire:

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta) = \frac{dt}{d\theta}(\theta).\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = 2\theta.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) \quad \text{ou plus simplement} \quad \frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = \frac{dt}{d\theta}.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = 2\theta.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$$

2.2 Abscisse curviligne

définition 2:

Soit (I,f) une courbe paramétrée, et $t_0 \in I$.
On appelle abscisse curviligne d'origine $t_0 \in I$ la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} s : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_{t_0}^{t} ||f'|| = \int_{t_0}^{t} ||f'(u)||du \end{array}}$

remarque 2

- *On a* $\boxed{\forall t \in I, s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du}$
- *Les fonctions x et y étant (au moins) C^1 sur I par hypothèse, on a les fonctions dérivées x' et y' qui sont continues sur I. Par composition de fonctions continues on peut donc affirmer que la fonction $t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ est continue sur I: cette fonction admet donc une primitive sur I et elle est intégrable sur tout segment inclus dans I*
- *Comme $||f'||$ est continue sur I et que $t_0 \in I$, on peut affirmer que s est l'unique primitive de la fonction $t \mapsto ||f'(t)||$ qui s'annule en t_0, c'est à dire c'est l'unique primitive de la fonction vitesse qui s'annule en t_0 (elle correspond à la distance parcourue sur la courbe si on se fixe comme point de départ le point $M(t_0)$)*
- *quelle que soit l'origine t_0 choisi, on a toujours*

$$\boxed{\forall t \in I, s'(t) = ||f'(t)||} \text{ soit encore } \boxed{\frac{ds}{dt} = ||f'|| = \left|\left|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right|\right|}$$

théorème 1: longueur d'un arc

Soit (I,f) une courbe paramétrée régulière, et $t_1 \leqslant t_2$ deux réels appartenant à I.
La longueur que décrit le point $M(t)$ quand t parcourt l'intervalle $[t_1,t_2]$ est donnée par

$$\boxed{l(M_{t_1}M_{t_2}) = \int_{t_1}^{t_2} ||f'(t)|| = \int_{t_1}^{t_2} \left|\left|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)\right|\right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt}$$

exemple 2:

Déterminer la longueur de l'arc défini par $\begin{cases} x(t) & = t \\ y(t) & = \mathrm{ch}(t) \end{cases}$ avec $t \in [0,2]$

solution

exemple 3:

Montrer qu'une ellipse de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$ a pour périmètre

$$p = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.dt$$

rem: il n'y a pas de formule simple pour le périmètre d'une ellipse!... contrairement à son aire

solution:

exemple 4:

On considère l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) & = t \\ y(t) & = \operatorname{ch} t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

1. Déterminer l'abscisse curviligne d'origine $t_0 = 0$ puis celle d'origine $t_0 = 1$
2. Faire un schéma pour illustrer ces notions

solution:

théorème 2:

Soit (I,f) une courbe paramétrée régulière de classe C^1 , et $t_0 \in I$.

1. Une abscisse curviligne fournit une nouvelle paramétrisation de classe C^1 de la courbe paramétrée
2. Pour cette paramétrisation, on a $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}$ qui est un vecteur de norme un, c'est à dire $\left|\left|\dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}\right|\right| = 1$

la paramétrisation de la courbe par l'abscisse curviligne correspond à son parcours à la vitesse unitaire

illustration du théorème 2 et pseudo-démonstration=(dernière figure de la vidéo V055)

exemple 5: cercle de centre O et de rayon R

- sur l'arc paramétré (I,f) suivant $\boxed{\begin{array}{rcl} f:[-\pi,+\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M(t)=(R\cos t,R\sin t) \end{array}}$

  on a vu que $s : t \mapsto Rt$ était une abscisse curviligne.
- Effectuons le changement de paramétrage $u = Rt$.
  i) $t \in [-\pi,+\pi] \Longleftrightarrow u \in [-R\pi,+R\pi]$
  ii) $f(t) = (R\cos t,R\sin t) = (R.\cos\dfrac{u}{R},R.\sin\dfrac{u}{R})$
  iii) on obtient donc comme nouveau paramétrage du cercle

$$\boxed{\begin{array}{rcl} g:[-R\pi,+R\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & (R.\cos\dfrac{u}{R},R.\sin\dfrac{u}{R}) \end{array}}$$

- très souvent, plutôt que de multiplier les noms des paramètres, lorsque l'on paramètre par l'abscisse curviligne on va encore appeler s le nouveau paramètre(on confond volontairement la fonction s et le paramètre s) : ce qui donnerait ici $\boxed{\begin{array}{rcl} g:[-R\pi,+R\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \longmapsto & (R.\cos\dfrac{s}{R},R.\sin\dfrac{s}{R}) \end{array}}$
- on a $g'(s) = (-\sin\dfrac{s}{R},\cos\dfrac{s}{R})$ et donc $||g'(s)|| = 1$
- On a deux courbes paramétrées avec le même support :

$$t \mapsto M(t) = f(t) \qquad \text{et} \qquad s \mapsto M(s) = g(s)$$

- on a trouvé que $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = (R\cos t,R\sin t)$ et $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds} = (-\sin\dfrac{s}{R},\cos\dfrac{s}{R})$

2.3 Repère de Frenet

définition 3:

Soit (I,f) une courbe paramétrée régulière de classe C^1(au moins), et $t \in I$
On appelle:

- vecteur unitaire tangent au point $M(t)$ le vecteur $\boxed{\vec{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{f'(t)}}{||\overrightarrow{f'(t)}||}}$
- vecteur unitaire normal au point $M(t)$ le vecteur $\vec{N}(t)$, qui est l'image de $\vec{T}(t)$ par la rotation d'angle $+\pi/2$
- repère de Frenet au point $M(t)$ le repère orthonormé direct $(M(t),\vec{T}(t),\vec{N}(t))$
- paramètre angulaire au point $M(t)$ le réel $\alpha(t)$ tel que $\boxed{\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t)).\vec{i} + \sin(\alpha(t)).\vec{j}}$

exemple 6:

On considère l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) & = t \\ y(t) & = t^3/3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
Déterminer le repère de Frenet ainsi que le paramètre angulaire en tout point $M(t)$

solution et illustration V056

remarque 3 (*pratique*)

- *On a comme notations équivalentes* $\forall t \in I, s'(t) = \dfrac{ds}{dt}(t) = ||\overrightarrow{f'(t)}|| = ||\overrightarrow{M'(t)}|| = ||\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)||$
- *on a* $\boxed{\vec{T}(t) = (\dfrac{x'(t)}{s'(t)},\dfrac{y'(t)}{s'(t)})}$ *dans la base* $(\vec{i},\vec{j})$
- *si* $\vec{T} = (T_x,T_y)$ *dans une base orthonormée directe alors* $\vec{N} = (-T_y,T_x)$ *dans la même base.*
  En particulier on a $\boxed{\vec{N}(t) = (-\dfrac{y'(t)}{s'(t)},\dfrac{x'(t)}{s'(t)})}$ *dans la base* $(\vec{i},\vec{j})$
- *pour alléger les notations, on écrira souvent* $\vec{T}$ *au lieu de* $\vec{T}(t)$, $\vec{N}$ *au lieu de* $\vec{N}(t)\dots$
  Avec ces notations, on a alors $\boxed{\vec{T} = (\dfrac{x'}{s'},\dfrac{y'}{s'})}$ *et* $\boxed{\vec{N} = (-\dfrac{y'}{s'},\dfrac{x'}{s'})}$
- $\boxed{\vec{T} = \dfrac{\overrightarrow{f'(t)}}{||\overrightarrow{f'(t)}||} = \dfrac{\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}}{||\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}||} = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}}$ *car* $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \dfrac{ds}{dt}.\dfrac{\overrightarrow{dM}}{ds}$ *et* $\dfrac{ds}{dt} = ||\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}|| > 0$
- *Un arc paramétré régulier de classe au moins* C^1 *est orienté par les directions des vecteurs unitaires tangents, c'est à dire par le sens de parcours de la courbe.*

2.4 Paramètre angulaire

théorème 3: théorème de relèvement(admis)

Si f est de classe C^2 sur I alors il existe une fonction α de classe C^1 sur I telle que

$$\forall t \in I, \vec{T}(t) = \cos(\alpha(t)).\vec{i} + \sin(\alpha(t)).\vec{j}$$

remarque 4

- *Le vecteur* $\vec{T}(t)$ *est par définition un vecteur unitaire. Il est donc certain que pour tout* $t \in I$ *fixé, il existe une quantité* $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ *tel que* $\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j}$. *Le point important du théorème précédent est que la fonction* α *peut être choisie de classe* C^1 *sur* I *(lorsque* f *est* C^2 *sur* I*)*
- *La fonction* α *n'est pas unique. Mais deux fonctions* α_1 *et* α_2 *qui vérifieraient le théorème 3 seraient égales sur* I *modulo* 2π
- *Si on ne trouve pas facilement l'angle* α, *on peut quand même trouver sa dérivée de la manière suivante :*
  grâce au calcul du vecteur tangent, on obtient $\tan(\alpha) = \dfrac{y'}{x'}$
  donc $(1 + \tan^2(\alpha))\alpha' = (\dfrac{y'}{x'})'$ *et alors* $\alpha' = \dfrac{(\dfrac{y'}{x'})'}{1 + (\dfrac{y'}{x'})^2}$.
- *En notant* $(0,\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$ *le repère polaire usuel, l'application* α *est donc telle que* $\vec{T}(t) = \vec{u}(\alpha(t))$

2.5 Courbure

théorème 4: et définition de la courbure

Soit (I,f) une courbe paramétrée de classe C^2 au moins.

i) Il existe un unique réel γ tel que $\boxed{\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N}}$.

ii) Ce réel est appelé <u>la courbure de Γ au point M</u>

iii) Lorsque $\gamma \neq 0$, le réel $R = \dfrac{1}{\gamma}$ est appelé <u>le rayon de courbure</u> au point M

exemple 7: cercle de centre O et de rayon R

i) cercle décrit dans le sens trigonométrique

- considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f :]-\pi,+\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M(t) = (R\cos t, R\sin t) \end{array}}$.
- on a: $\forall t \in]-\pi,+\pi], f'(t) = (-R\sin t, R\cos t) = R(-\sin t, \cos t) = R(-\sin t.\vec{i} + \cos t.\vec{j})$
- on a: $\forall t \in]-\pi,+\pi], ||f'(t)|| = |R|.||(-\sin t, \cos t)|| = |R|.1 = R$
- Ainsi $\vec{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{f'(t)}}{||\overrightarrow{f'(t)}||} =$ $\qquad\qquad$ $\vec{N}(t) =$

  et $\alpha(t) =$

ii) cercle décrit dans le sens horaire

ceci revient à changer t en $-t$ dans l'exemple ci-dessus

- considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f :]-\pi,+\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M(t) = (R\cos t, -R\sin t) \end{array}}$.
- on a: $\forall t \in]-\pi,+\pi], f'(t) = (-R\sin t, -R\cos t) = R(-\sin t, -\cos t) = R(-\sin t.\vec{i} - \cos t.\vec{j})$
- on a: $\forall t \in]-\pi,+\pi], ||f'(t)|| = |R|.||(-\sin t, -\cos t)|| = |R|.1 = R$
- Ainsi $\vec{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{f'(t)}}{||\overrightarrow{f'(t)}||} =$ $\qquad\qquad$ $\vec{N}(t) =$

  et $\alpha(t) =$

remarque 5

Si le vecteur tangent $\overrightarrow{T}$ est facile à dériver alors on peut aussi calculer le rayon à l'aide de la formule suivante: $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\dfrac{ds}{dt}\overrightarrow{N}$

théorème 5: relations de Frenet

1. $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{x'}{s'}}$ $\boxed{\sin\alpha = \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{y'}{s'}}$
2. $\boxed{\vec{T} = \cos\alpha.\vec{i} + \sin\alpha.\vec{j}}$ $\boxed{\vec{N} = \dfrac{d\vec{T}}{d\alpha} = -\sin\alpha.\vec{i} + \cos\alpha.\vec{j}}$
3. $\boxed{\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\alpha'}{s'}}$
4. en un point birégulier $\gamma \neq 0$ et $\boxed{R = \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{ds}{d\alpha} = \dfrac{s'}{\alpha'}}$
5. Relations de Frenet :
   $\boxed{\dfrac{d\vec{M}}{ds} = \vec{T}}$ $\boxed{\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \gamma.\vec{N} = \dfrac{1}{R}.\vec{N}}$ $\boxed{\dfrac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma.\vec{T} = -\dfrac{1}{R}.\vec{T}}$
6. (HP) vitesse et accélération dans le repère de Frenet
   $\boxed{f'(t) = \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \left(\dfrac{ds}{dt}\right)\vec{T}}$ $\boxed{f''(t) = \dfrac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = \left(\dfrac{d^2s}{dt^2}\right)\vec{T} + \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \gamma\vec{N}}$
7. (HP): $\boxed{\gamma = \dfrac{x'.y'' - y'.x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \dfrac{\det(f',f'')}{||f'||^3}}$

2.6 Développée

définition 4:

Soit (I,f) un arc paramétré birégulier de classe C^2 et Γ son support.

On appelle :

- centre de courbure de Γ au point M le point C défini par $\boxed{\overrightarrow{MC} = R.\vec{N}}$ càd $\boxed{C = M + R\vec{N}}$
- cercle de courbure de Γ au point M le cercle de centre C et de rayon $|R|$
- développée de l'arc Γ le lieu(=l'ensemble) des centres de courbure de Γ.

le cercle de courbure est le cercle tangent en M à la courbe qui approche le mieux la courbe en M de même que la droite tangente en M est la droite qui approche le mieux la courbe en M

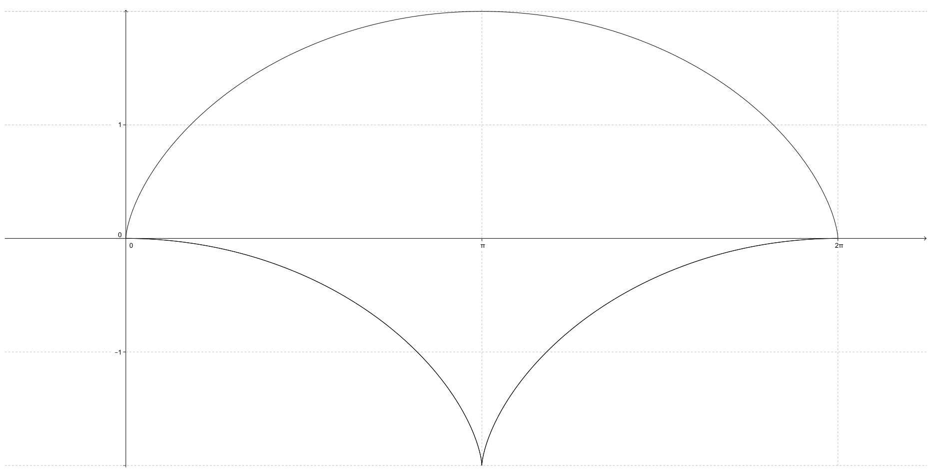
exemple 8: arche de cycloïde: très classique

soit l'arc paramétré $t \mapsto M(t) = (x(t),y(t)) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ avec $t \in]0,2\pi[= I$.

- les fonctions x et y sont de classe C^∞ sur I, et l'on a $\left\{\begin{array}{ll} x'(t) & = \\ y'(t) & = \end{array}\right.$
- ainsi $x'(t)^2 + y'(t)^2 = (2\sin^2\frac{t}{2})^2 + (2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2})^2 = 4\sin^2\frac{t}{2}(\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}) = 4\sin^2\frac{t}{2}$
  Comme $t \in]0,2\pi[$ on a $t/2 \in]\qquad[$ et donc $\sin\frac{t}{2} > 0$, ainsi

$$\boxed{s'(t) = \frac{ds}{dt}(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 2\sin\frac{t}{2}}$$

- D'où $\vec{T}(t) = (\qquad,\qquad) = (\qquad,\qquad)$ et $\vec{N}(t) = (\qquad,\qquad)$
- On a donc $\alpha(t) = (\qquad,\qquad)$
- Par la méthode de votre choix, montrer que $\boxed{R = -4\sin\frac{t}{2}}$
- le centre de courbure a donc comme coordonnées
  $$C = M + \tfrac{1}{\gamma}\vec{N} = (t - \sin t, 1 - \cos t) - 4\sin\tfrac{t}{2}(-\cos\tfrac{t}{2}, \sin\tfrac{t}{2}) = (t + \sin t, \cos t - 1)$$
  on peut remarquer que $C(t+\pi) = M(t) + (\pi, -2)$
  donc la développée de la cycloïde est l'image d'elle-même par la translation de vecteur $\pi\vec{i} - 2\vec{j}$



théorème 6:

La droite normale en M à Γ
est tangente en C à la développée.
(on verra plus tard que
" la développée à Γ est
l'enveloppe des normales à Γ ")

exemple 9:

On considère l'arc paramétré $(\mathbb{R},f)$ avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (\frac{t^2}{2}, t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)$$

1. La courbe est-elle régulière?
2. Déterminer le repère de Frenet là où il peut être défini.
3. Expliquer pourquoi la courbe possède une tangente en $M(t = 0)$ et donner cette tangente.
4. Déterminer l'abscisse curviligne d'origine $t = 0$

exemple 10: développée du graphe de la fonction exponentielle

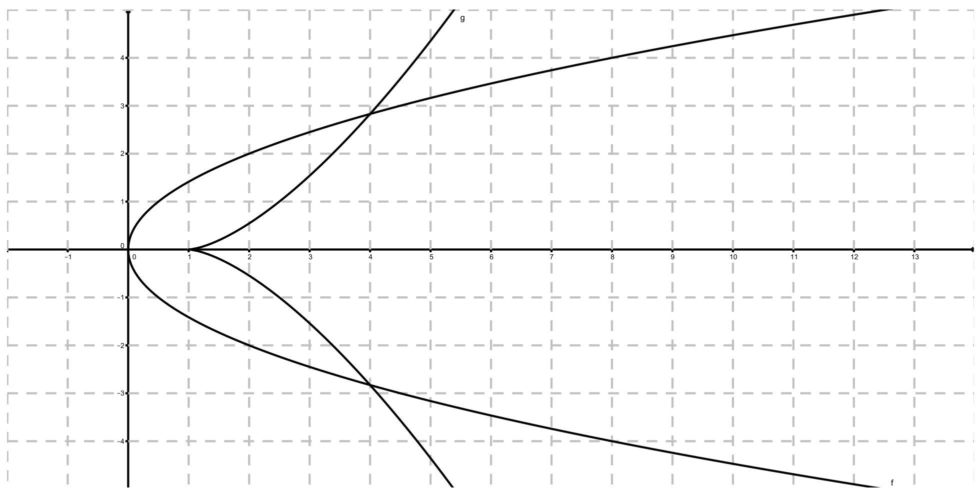
On considère l'arc paramétré par $f(t) = (t,e^t)$ avec $t \in I = \mathbb{R}$.
Montrer que :
$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}(1,e^t)$ et $\gamma = \dfrac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}$ et enfin $C = (t - 1 - e^{2t}, 2e^t + e^{-t})$
Chercher la longueur de l'arc entre $M(0)$ et $M(1)$
En quel point la courbure γ est-elle extrémale?

exemple 11:

Chercher la développée de l'arc paramétré : $x(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}, y(t) = th(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$

exemple 12: Parabole

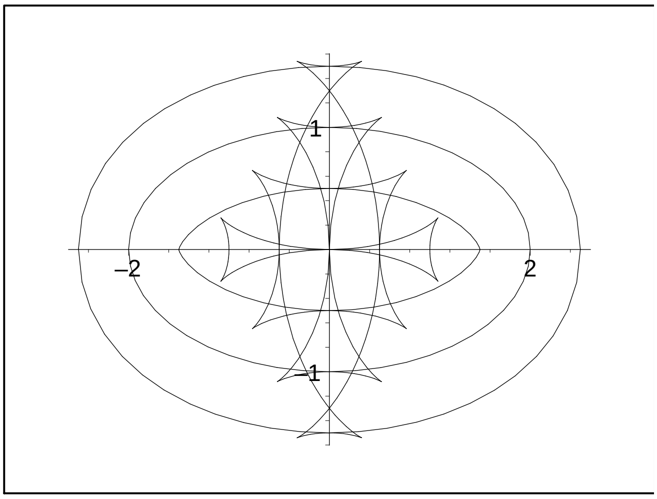
Soit $p > 0$ fixé. On considère la parabole paramétrée par $(x(t),y(t)) = (\dfrac{t^2}{2p}, t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.
Déterminer la développée de cette parabole.
On devra trouver $\gamma = \dfrac{-p^2}{(t^2 + p^2)^{3/2}}$ *et* $C(t) = \left(\dfrac{3t^2}{2p} + p, -\dfrac{t^3}{p^2}\right)$
Ci-dessous la parabole et sa développée.



exemple 13: Ellipse

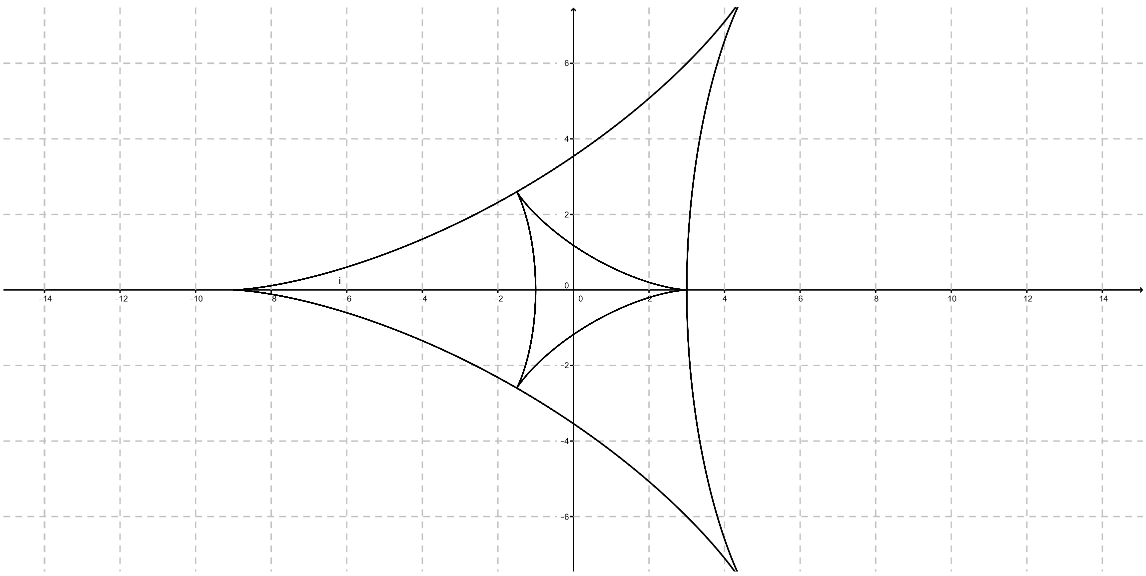
On considère la courbe Γ paramétrée par $f : t \mapsto M(t) = (2\cos t, \sin t)$ avec $t \in [0,2\pi]$

1. Déterminer la développée de Γ
   On devra trouver $\gamma = \dfrac{2}{(4\sin^2 t + \cos^2 t)^{3/2}}$ *et* $C(t) = \left(\dfrac{3}{2}\cos^3 t, -3\sin^3 t\right)$
2. Faire l'étude complète de la développée et la représenter sur un même dessin que Γ
3. λ étant un scalaire fixé, à tout point $M(t) \in \Gamma$ on associe le point $Q(t)$ défini par $Q(t) = M(t) + \lambda.\overrightarrow{N(t)}$ (le vecteur $\overrightarrow{N(t)}$ étant le vecteur unitaire normal au point $M(t)$ déterminé à la question précédente.)
   On s'intéresse au lieu de $Q(t)$ c'est à dire à l'arc paramétré $g : t \mapsto Q(t)$ avec $t \in [0,2\pi]$.
   Intuitivement que pensez-vous de la forme et de la position de Γ' lorsque $\lambda < 0$? Lorsque $\lambda > 0$?



exemple 14:

Montrer que la développée de l'arc $\begin{cases} x = & 2\cos t + \cos 2t \\ y = & 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$ est l'arc $\begin{cases} x = & 6\cos t - 3\cos 2t \\ y = & 6\sin t + 3\sin 2t \end{cases}$



Montrer que l'on passe d'une courbe à l'autre par une transformation géométrique très simple. (On pourra considérer le changement de paramètre $t \longleftarrow t + \pi$)

3 Enveloppe d'une famille de droites

exemple 15:

On souhaite déterminer l'ensemble des droites qui sont tangentes au cercle de centre $A(1,0)$ et de rayon 2

1. Géométriquement:
   Pour tout t réel, on considère le point $B(t)$ qui appartient au cercle tel que $(\vec{i},\overrightarrow{AB(t)}) = t$.
   Donner les coordonnées du point $B(t)$, du vecteur normal à la tangente au cercle passant par $B(t)$ puis une équation cartésienne de cette dernière
2. Analytiquement:
   Donner une représentation paramétrique du cercle, puis une équation cartésienne des tangentes au cercle.

définition 5:

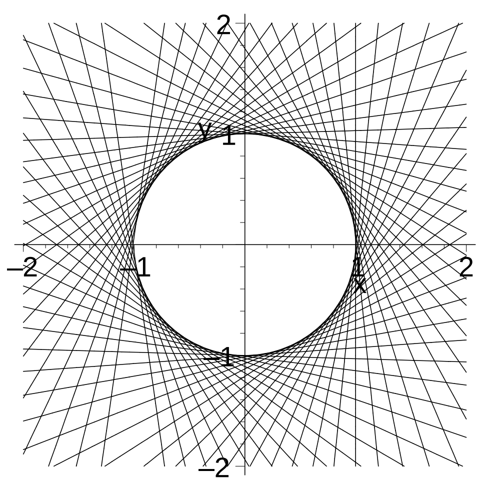
- On appelle famille de droites, et on note $(D_t)_{t\in J}$, un ensemble de droites indexées par un réel t appartenant à un certain intervalle réel J
- On appelle enveloppe de la famille $(D_t)_{t\in J}$ tout courbe Γ telle que
  i) chaque droite D_t soit une tangente à Γ
  ii) Γ ne possède pas d'autres tangentes que les droites $(D_t)_{t\in J}$

Pour $t \in J$ fixé, le point de Γ en lequel la droite tangente est la droite (D_t) s'appelle le point caractéristique de la droite (D_t)

remarque 6

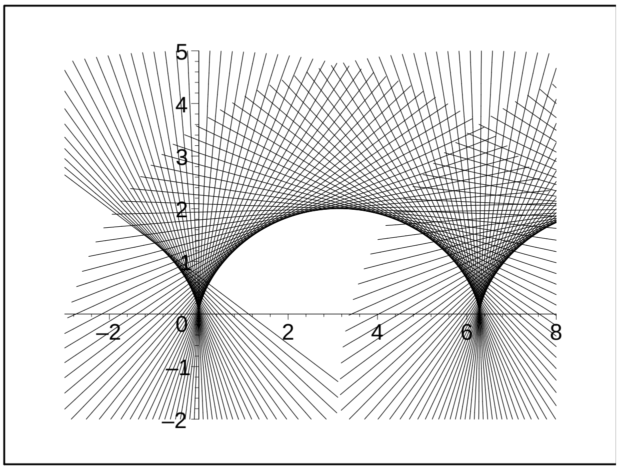
La famille de droites $(D_t)_{t\in I}$ peut être représentée par

1. *une famille d'équations cartésiennes de droites : $D(t) : a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ où a,b et c sont des fonctions définies sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$*
   exemple: $D(t) : \cos(t).x + \sin(t).y - 1 = 0$
2. *une famille de représentations paramétriques de droites : $D(t) : \lambda \to A(t) + \lambda\overrightarrow{u}(t)$ où A et u sont des fonctions définies sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$*
   exemple: $D(t) : \lambda \mapsto (\cos t, \sin t) + \lambda(-\sin t, \cos t)$

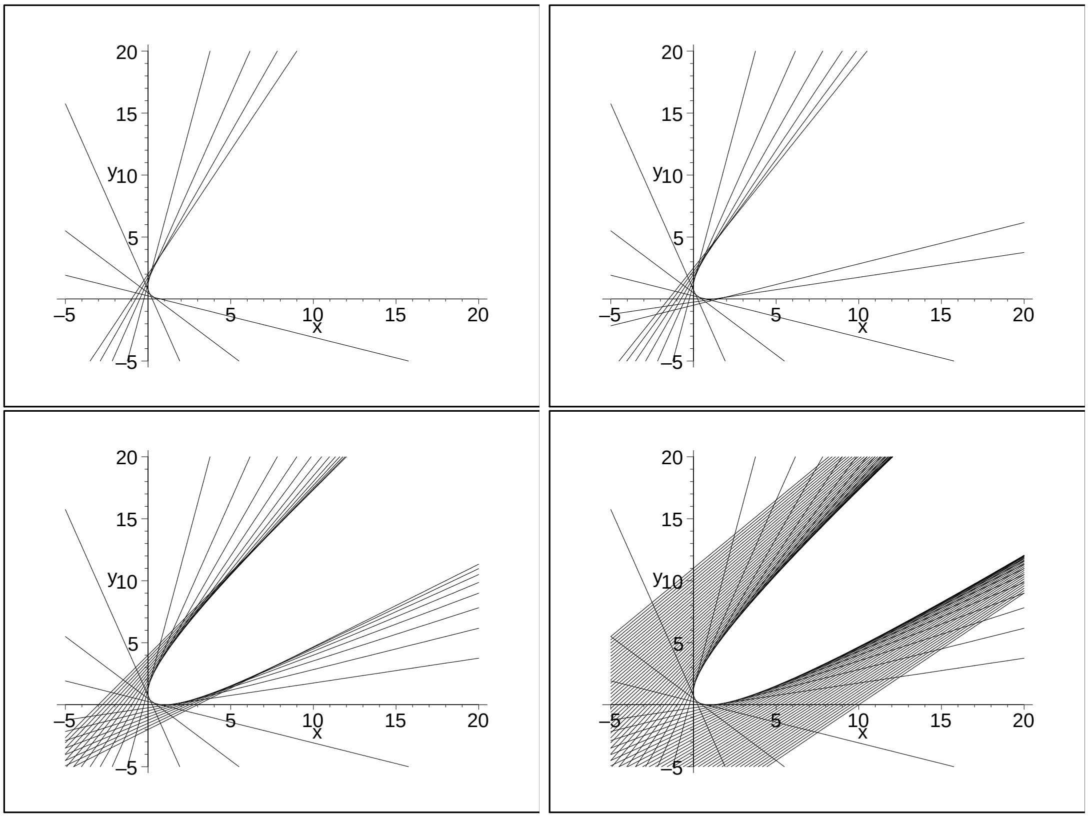


- *On pourra remarquer qu'il s'agit de la même famille de droites... la voici représenter ci-contre!*
- *La famille de droites est la famille des tangentes au cercle de centre O et de rayon un.*
- *Autrement dit: l'enveloppe de la famille de droites est le cercle $\mathcal{C}(O,1)$!*

exemple 16: Une courbe Γ est l'enveloppe de la famille des droites tangentes à Γ
ci-dessous on represente la famille des tangentes à la cycloïde étudié à l'exemple 8 c'est à dire les droites D_t de représentation paramétrique : $\lambda \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t) + \lambda(\sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2})$



exemple 17:
Soit un réel $a > 0$. Une droite variable coupe (Ox) en M et (Oy) en N tels que $\overline{OM} + \overline{ON} = a$.
On obtient ainsi une famille de droites : introduisons le paramètre t, par exemple, comme abscisse du point M.
On a donc $M(t,0)$ et $N(0,a-t)$. A vous d'écrire les équations, cartésiennes et paramétriques, des droites $(D_t) = (MN)$! Voici ce que l'on obtient si l'on représente quelques droites de cette famille :



On trouvera comme représentation paramétrique de l'enveloppe $(x = \frac{t^2}{a}, y = \frac{(t-a)^2}{a})$.
Mais comme $t = \frac{x+a-y}{2}$, on obtient comme équation cartésienne $4ax = (a + x - y)^2$.
En se plaçant dans un repère lié aux deux bissectrices, on trouve $X = \frac{a\sqrt{2}}{4} + \frac{Y^2}{a\sqrt{2}}$: c'est une parabole !

remarque 7

- *L'enveloppe d'une famille de droites n'existe pas nécessairement: penser à une famille de droites parallèles !*

méthode 1: comment déterminer l'enveloppe d'une famille de droites

Soit $(D_t)_{t\in J}$ une famille de droites de représentation paramétrique $\lambda \mapsto A(t) + \lambda.\overrightarrow{u}(t)$.
Notons $\mathcal{E}$ l'enveloppe de cette famille.
On a les équivalences suivantes:

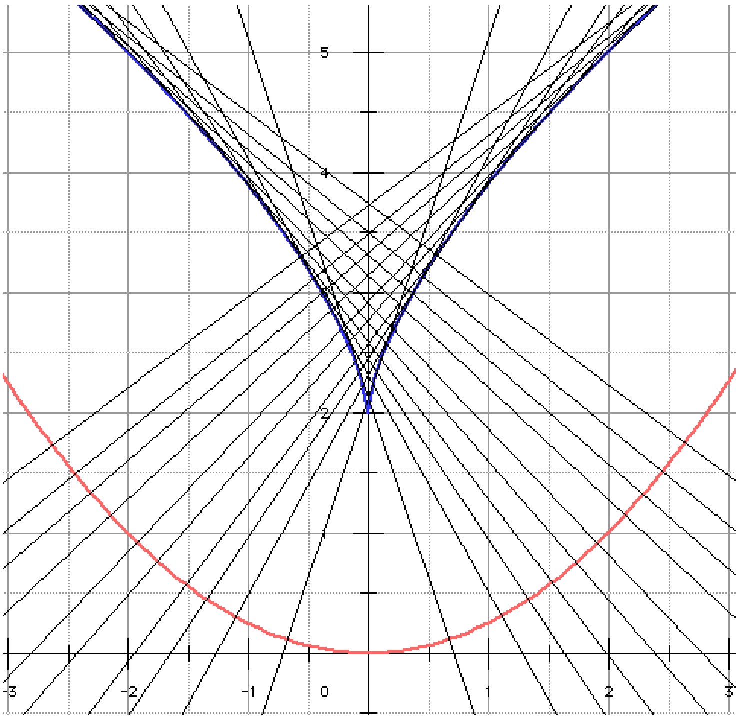
$$\text{le point } P(t) \in \mathcal{E} \iff \begin{cases} P(t) \in D_t \\ D_t \text{ est la tangente à } \mathcal{E} \text{ en } P(t) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \exists \lambda(t) \in \mathbb{R}, \text{tel que } P(t) = A(t) + \lambda(t).\vec{u}(t) \\ P'(t) \text{ et } \vec{u}(t) \text{ sont colinéaires} \end{cases}$$

or $P' = A' + \lambda'.\vec{u} + \lambda.\vec{u}\,'$ et ainsi:

$$\begin{aligned} P'(t) \text{ et } \vec{u}(t) \text{ sont colinéaires} &\iff \det(A' + \lambda'.\vec{u} + \lambda.\vec{u}\,',\vec{u}) = 0 \\ &\iff \det(A',\vec{u}) + \lambda'.\det(\vec{u},\vec{u}) + \lambda.\det(\vec{u}\,',\vec{u}) = 0 \\ &\iff \lambda = -\frac{\det(A',\vec{u})}{\det(\vec{u}\,',\vec{u})} \end{aligned}$$

théorème 7: enveloppes des normales: 2nde méthode pour trouver la développée!

Soit (I,f) une courbe paramétrée de classe C^2(au moins) de support Γ.
L'enveloppe des droites normales à Γ est la développée de Γ



4 Annexe

Démonstration théorème 2
notons s une abscisse curviligne de (I,f).

- *Remarquons que $s'(t) > 0$ car on a supposé Γ régulière et de ce fait $s'(t) = ||f'(t)|| \neq 0$ (et donc > 0).*
- *Ainsi s est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle I. Par le théorème de la bijection on sait que $J := s(I)$ est un intervalle et que, s réalise une bijection de I sur $J = s(I)$.*
- *On a d'une part* $\boxed{\begin{array}{rcl} s : I & \longrightarrow & J = s(I) \\ t & \longmapsto & s(t) \end{array}}$ *et donc* $\boxed{\begin{array}{rcl} s^{-1} : J & \longrightarrow & I \\ u & \longmapsto & s^{-1}(u) \end{array}}$
- *D'autre part* $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}}$.

  On peut donc paramétrer Γ de la manière suivante $\boxed{\begin{array}{rcl} g : J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & f(s^{-1}(u)) \end{array}}$
- *Calculons maintenant g'. On se rappelle déjà que $(s^{-1})' = \dfrac{1}{s' \circ s^{-1}}$ D'où :*

$$g'(u) = (s^{-1})'(u)f'(s^{-1}(u)) = \frac{1}{s'(s^{-1}(u))}f'(s^{-1}(u)) = \frac{f'(s^{-1}(u))}{||f'(s^{-1}(u))||} \quad \textit{qui est un vecteur unitaire !}$$

- *La notation différentielle "écrit" ce qui a été dit plus haut par*

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \frac{1}{\left|\left|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right|\right|}\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \quad \textit{qui est un vecteur unitaire !}$$

exemple 18:

1. Montrer qu'en tout point birégulier la courbure est non nulle.
2. Montrer qu'en tout point d'une droite la courbure est nulle.
3. Montrer que si la courbure est constante et non nulle alors la courbe est un arc de cercle

CORRECTION DE L'EXEMPLE 10

- Pour tout t réel, on note $M'(t) = (1,e^t)$
- On a donc $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{1+e^{2t}}$ $\quad \overrightarrow{T} = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}(1,e^t)$ $\quad \overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}(-e^t,1)$
- On a $\tan\alpha = e^t$ donc $\alpha'(t).(1+\tan^2\alpha(t)) = e^t$ par dérivation.
  On trouve donc $\alpha'(t) = \dfrac{e^t}{1+e^{2t}}$
- On a $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{d\alpha}{dt}.\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{et}{1+e^{2t}}.\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}} = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^{3/2}}$
- $C = M + \dfrac{1}{\gamma}\overrightarrow{N} = (t,e^t) + \dfrac{1+e^{2t}}{e^t}(-e^t,1) = (t-1-e^{2t}, 2e^t + e^{-t})$
- Pour connaitre les valeurs extremales de γ on calcule sa dérivée.
  On trouve $\gamma'(t) = \dfrac{e^t(1-2e^{2t})}{(1+e^{2t})^{5/2}}$.
  γ est maximale pour $t = \dfrac{-\ln 2}{2}$, et l'on a alors $\gamma = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$
- La longueur entre les points $M(0)$ et $M(1)$ est donnée par la formule $\int_0^1 \sqrt{1+e^{2t}}dt = I$
  Pas facile de calculer cet intégrale, on peut penser poser $\theta = \sqrt{1+e^{2t}}$, ce qui donne

$$I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{\theta^2}{\theta^2-1}d\theta = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} 1 + \frac{1/2}{\theta-1} - \frac{1/2}{\theta+1}d\theta = \left[\theta + \frac{1}{2}\ln\frac{\theta-1}{\theta+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}$$

  (La valeur n'a pas d'importance)

CORRECTION DE L'EXEMPLE 14

- On note $I =]0,\dfrac{2\pi}{3}[$
- On a pour tout $t \in I, x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t)$ et $y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)$. Les fonctions x et y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et l'on a pour tout $x \in I$:

$$\boxed{x'(t) = -2\sin(t) - 2\sin(2t) = -4\sin\frac{3t}{2}.\cos\frac{t}{2} \text{ et } y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}$$

- Ainsi $\dfrac{ds}{dt}(t) = s'(t) = 4|\sin\dfrac{3t}{2}| = 4\sin\dfrac{3t}{2}$ car on a $t \in I$ et donc $\dfrac{3t}{2} \in]0,\pi[$
  On remarque que sur l'intervalle I tous les points sont réguliers.
- On a donc $\boxed{\overrightarrow{T} = (-\cos\dfrac{t}{2}, \sin\dfrac{t}{2}) \text{ et } \overrightarrow{N} = -(\sin\dfrac{t}{2}, \cos\dfrac{t}{2})}$
- Le paramètre angulaire α est ici facile à déterminer: on peut prendre $\boxed{\alpha = \pi - \dfrac{t}{2}}$
- On a donc $\boxed{\gamma(t) = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \dfrac{-1}{8\sin\dfrac{3t}{2}}}$
- On détermine le centre de courbure $C(t)$ par la formule $C(t) = M(t) + R(t).\overrightarrow{N}(t)$, soit:

  $x_C(t) = 2\cos(t)+\cos(2t)+8\sin\dfrac{3t}{2}\sin\dfrac{t}{2} = 2\cos(t)+\cos(2t)+4\cos(t)-4\cos(2t) = 6\cos(t)-3\cos(2t)$

  $y_C(t) = 2\sin(t)-\sin(2t)+8\sin\dfrac{3t}{2}\cos\dfrac{t}{2} = 2\sin(t)-\sin(2t)+4\sin(t)+4\sin(2t) = 6\sin(t)+3\sin(2t)$
- On trouve bien que la développée a pour représentation paramétrique

$$\boxed{t \mapsto (6\cos(t) - 3\cos(2t), 6\sin(t) + 3\sin(2t))}$$