COURBES PARAMETREES DU PLAN

Table des matières

Dans tout ce polycopié, on considèrera le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$.

exemple 1: vocabulaire sur un exemple

1. Soient les fonctions numériques $\boxed{\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \arctan t \end{array}}$
   - On note $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (f_1(t),f_2(t)) \end{array}}$ ou plus simplement encore $f = (f_1, f_2)$
   - f est *une fonction vectorielle* dont *les fonctions coordonnées* sont f_1 et f_2
2. Soient les fonctions numériques $\boxed{\begin{array}{rcl} x : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos t \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} y : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin t \end{array}}$
   - On note $\boxed{\begin{array}{rcl} g : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t),y(t)) \end{array}}$ ou plus simplement encore $g = (x, y)$
   - g est *une fonction vectorielle* dont *les fonctions coordonnées* sont x et y

théorème 1: premiers théorèmes généraux

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f la fonction vectorielle $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t),y(t)) \end{array}}$.

On a

i) f est sur $I \Longleftrightarrow x$ et y sont sur I

ii) f est en $t_0 \in I \Longleftrightarrow x$ et y sont en t_0

Les fonctions vectorielles f et g de l'exemple ci-dessus sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $[0,2\pi]$ respectivement

théorème 2: limite d'une fonction vectorielle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f la fonction vectorielle $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t),y(t)) \end{array}}$.

Soit t_0 un élément de I ou une extrémité de I.
On a

$$f \text{ possède une limite (finie) en } t_0 \Longleftrightarrow x \text{ et } y \text{ possèdent des limites finies en } t_0$$

et dans ce cas: $\boxed{\lim_{t\to t_0} f(t) = (\lim_{t\to t_0} x(t),\ \lim_{t\to t_0} y(t))}$

remarque:
Dans l'exemple précédent, comme $\lim_{t\to 0} x(t) = 1$ *et* $\lim_{t\to 0} y(t) = 0$, *on peut affirmer que* $\lim_{t\to 0} f(t) = (1,0)$

théorème 3: formules de dérivation

Soient $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (f_1(t),f_2(t)) \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} g : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (g_1(t),g_2(t)) \end{array}}$ deux fxs vectorielles de classe $C^p, p \geqslant 1$
Soit $\lambda : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction scalaire de classe C^p.
Alors

i) $f + g$ est C^p sur I avec $\boxed{(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}}$

ii) $\lambda.f$ est C^p sur I avec $\boxed{(\lambda f)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{(i)} f^{(k-i)}}$

en particulier $\boxed{(\lambda f)' = \lambda'.f + \lambda.f'}$

exemple 2: en guise d'apéritif ou d'échauffement

Considérons l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) &= \sin t \\ y(t) &= \sin(2t) \end{cases}$ avec $t \in I = [-\pi, +\pi]$

i) Les fonctions x et y sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et l'on a $\boxed{\forall t \in I, x'(t) = \cos t \text{ et } y'(t) = 2\cos(2t)}$

ii) L'étude des variations de x et de y amène au tableau suivant.

t	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$x'(t)$			$-$		0				$+$				0		$-$		
$x(t)$	0		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+1$		$+\frac{\sqrt{2}}{2}$		0
$y(t)$	0		1		0		-1		0		$+1$		0		-1		0
$y'(t)$		$+$	0		$-$		0		$+$		0		$-$		0	$+$	

iii) On obtient ainsi 9 points par lesquels la courbe passe... mais nombre de questions restent en suspens!

- Aurait-on pu réduire l'intervalle d'étude?
- La courbe possède-t-elle une tangente en chaque point? Ou bien existe-t-il des points anguleux?
- Peut-on facilement indiquer la tangente aux 9 points considérés?
- ...

1 Etude et tracé des courbes planes paramétrées

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $I \to \mathbb{R}^2$.
- Plutôt que les noter f_1 et f_2, on note x et y les fonctions coordonnées de f.
- En résumé, on a donc $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t),y(t)) \end{array}}$.

  On notera $M(t)$ ou M_t le point du plan de coordonnées $(x(t),y(t))$.
- On appelle <u>courbe paramétrée</u> la fonction vectorielle f (muni de son ens. de définition)
- On appelle <u>support de la courbe paramétrée</u> et on note Γ l'ensemble des points M_t avec $t \in I$:

$$\boxed{\Gamma = \{M_t = (x(t),y(t)) | t \in I\}}$$

exemple 3: un premier exemple très simple

La parabole d'équation $y = x^2$ est le support de la courbe paramétrée

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t,t^2) \end{array}}$$

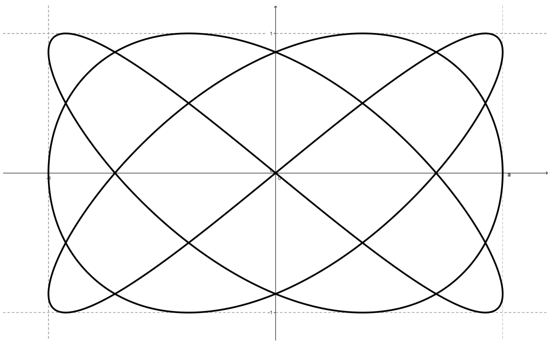
elle est également le support de la courbe paramétrée

$$\boxed{\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (-t,t^2) \end{array}}$$

ou encore de la courbe paramétrée

$$\boxed{\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2t,4t^2) \end{array}}$$

exemple 4: deux courbes paramétrées différentes peuvent avoir le même support.



ci-contre le support de la courbe paramétrée donnée par la fonction vectorielle

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(3t), \sin(4t)) \end{array}}$$

c'est aussi le support de la courbe paramétrée donnée par la fonction

$$\boxed{\begin{array}{rcl} g : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin(3t), \cos(4t - \pi/6)) \end{array}}$$

exemple 5:

Ecrire une paramétrisation pour les courbes suivantes:

1. l'axe des abscisses
2. la droite d'équation $y = 2x + 1$
3. la droite d'équation $x = 3$
4. le cercle de centre $A(2,3)$ et de rayon un.

1.1 premiers exemples simples

Dans les exemples qui suivent, A est le point de coordonnées (1,0).

- **segment :**

  i) $\boxed{\begin{array}{rcl} f:[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t,0) \end{array}}$ est une courbe paramétrée qui a pour support le segment $[OA]$.
  On dit aussi que f fournit une paramétrisation du segment $[OA]$

  ii) $\boxed{\begin{array}{rcl} g:[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (1-t,0) \end{array}}$ est une courbe paramétrée qui a pour support le segment $[OA]$. Cette fois, le segment est parcouru de A vers O.

  iii) $\boxed{\begin{array}{rcl} h:[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t^2,0) \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} i:[0,\pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin t,0) \end{array}}$ sont deux courbes paramétrées qui ont encore pour support le segment $[OA]$.

  iv) $\boxed{\begin{array}{rcl} j:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin^2 t,0) \end{array}}$ est elle aussi une paramétrisation du segment $[OA]$.
  Cette fois, la paramétrisation n'est pas bijective: tout point du segment possède une infinité d'antécédents par la fonction j

- **cercle trigonométrique :** on considère le cercle de centre O et de rayon un.

  $\boxed{\begin{array}{rcl} f:I=[0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t,\sin t) \end{array}}$ est une paramétrisation de ce cercle.

  - si on prend comme ensemble de départ $I=[0,2\pi]$, le support est toujours le cercle trigonométrique: le point de coordonnées (1,0) correspond aux points $M(0)=M(2\pi)$.
  - si l'on veut une paramétrisation bijective, (c'est à dire qu'à tout point M du cercle correspond un et un seul réel $t\in I$), il faut et il suffit que I soit un intervalle semi-ouvert de longueur 2π
  - si on prend $I=\mathbb{R}$, tout point du cercle est paramétré par une infinité de valeurs de t.

1.2 exemples de référence

- **droites :** *la droite passant par le point $A(x_A,y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{d}=(d_1,d_2)$ a pour représentation paramétrique possible :* $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M_t=A+t.\vec{d}=(x_A+t.d_1,y_A+t.d_2) \end{array}}$

- **segments :** *le segment d'extrémités les points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ a pour représentation paramétrique possible :* $\boxed{\begin{array}{rcl} f:[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M_t=A+t.\overrightarrow{AB}=(x_A+t.(x_B-x_A),y_A+t.(y_B-y_A)) \end{array}}$

- **cercles :** *le cercle de centre $A(x_A,y_A)$ et de rayon $R>0$ a pour représentation paramétrique possible :*

  $$\boxed{\begin{array}{rcl} f:[0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M_t=A+R.(\cos(t).\vec{i}+\sin(t).\vec{j})=(x_A+R.\cos t,y_A+R.\sin t) \end{array}}$$

1.3 réduction de l'intervalle d'étude

Les propriétés analytiques des fonctions x et y se traduisent par des propriétés géométriques sur la courbe. Comme toujours en mathématiques, on va tenter de faire le moins de travail possible pour obtenir un résultat. Ainsi, on va essayer par le calcul d'exhiber des symétries de la courbe afin de réduire l'intervalle d'étude de nos fonctions x et y.

1. **cas où $\exists \mathbf{T} \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}, \mathbf{x}(\mathbf{t}+\mathbf{T}) = \mathbf{x}(\mathbf{t})$ et $\mathbf{y}(\mathbf{t}+\mathbf{T}) = \mathbf{y}(\mathbf{t})$ (c'est à dire x et y périodiques, de même période)**

   Géométriquement, ceci signifie que $\boxed{M(t+T) = M(t)}$ pour tout t.
   On restreint l'étude à un intervalle de longueur T.
   La courbe est entièrement décrite lorsque t décrit n'importe quel intervalle de longueur T.

2. **cas où $\forall \mathbf{t} \in \mathbf{I}, \mathbf{x}(-\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t})$ et $\mathbf{y}(-\mathbf{t}) = -\mathbf{y}(\mathbf{t})$.**

   Géométriquement, ceci signifie que le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses: $\boxed{M(-t) = S_{Ox}(M(t))}$
   On restreint l'intervalle d'étude aux nombres positifs, c'est à dire $I \cap \mathbb{R}^+$.
   Pour obtenir toute la courbe on effectue ensuite une symétrie par rapport à (Ox)

3. **cas oú $\forall \mathbf{t} \in \mathbf{I}, \mathbf{x}(-\mathbf{t}) = -\mathbf{x}(\mathbf{t})$ et $\mathbf{y}(-\mathbf{t}) = \mathbf{y}(\mathbf{t})$**

   Géométriquement, ceci signifie que le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées: $\boxed{M(-t) = S_{Oy}(M(t))}$
   On restreint l'intervalle d'étude aux nombres positifs, c'est à dire $I \cap \mathbb{R}^+$.
   Pour obtenir toute la courbe on effectue ensuite une symétrie par rapport à (Oy)

4. **cas où $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}, \mathbf{x}(-\mathbf{t}) = -\mathbf{x}(\mathbf{t})$ et $\mathbf{y}(-\mathbf{t}) = -\mathbf{y}(\mathbf{t})$**

   Géométriquement, ceci signifie que le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport au point O: $\boxed{M(-t) = S_O(M(t))}$
   On restreint l'intervalle d'étude aux nombres positifs, c'est à dire $I \cap \mathbb{R}^+$.
   Pour obtenir toute la courbe on effectue ensuite une symétrie par rapport au point O

5. **cas où $\exists \mathbf{a} \in \mathbb{R}, \exists \mathbf{b} \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}, \mathbf{x}(\mathbf{2a}-\mathbf{t}) = \mathbf{2b} - \mathbf{x}(\mathbf{t})$ et $\mathbf{y}(\mathbf{2a}-\mathbf{t}) = \mathbf{y}(\mathbf{t})$**

   Géométriquement, ceci signifie que le point $M(2a-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à la droite (D) d'équation $x = b$:
   $\boxed{M(2a-t) = S_D(M(t))}$
   On restreint l'intervalle d'étude à $I \cap [a, +\infty[$. Pour obtenir toute la courbe on effectue une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = b$

6. **cas où $\exists \mathbf{a} \in \mathbb{R}, \exists \mathbf{b} \in \mathbb{R}, \exists \mathbf{c} \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}, \mathbf{x}(\mathbf{2a}-\mathbf{t}) = \mathbf{2b} - \mathbf{x}(\mathbf{t})$ et $\mathbf{y}(\mathbf{2a}-\mathbf{t}) = \mathbf{2c} - \mathbf{y}(\mathbf{t})$**

   Géométriquemet, ceci signifie que le point $M(2a-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport au point Ω de coordonnées (b,c):
   $\boxed{M(2a-t) = S_\Omega(M(t))}$
   On restreint l'intervalle d'étude à $I \cap [a, +\infty[$. Pour obtenir toute la courbe, on effectue une symétrie par rapport au point $\Omega(b,c)$

méthode 1: Plan pour la réduction de l'intervalle d'étude

1. On détermine les éventuelles périodicités T_x et T_y des fonctions x et y, et on en déduit l'éventuelle périodicité T de la fonction f.
   On écrit alors qu'**il suffit d'étudier et de représenter la courbe sur un intervalle de longueur T (quel qu'il soit) et que l'on obtient toute la courbe**
2. Si la fonction x et y ont des parités, on réduit l'intervalle d'étude à $[0, \frac{T}{2}]$ et on précise quelle symétrie on devra réaliser pour obtenir toute la courbe.
3. Si l'intervalle d'étude est du type $[0,a]$, on peut considérer $x(a-t)$ et $y(a-t)$. S'il y a des relations intéressantes, on réduit l'intervalle d'étude à l'intervalle $[0, \frac{a}{2}]$ et l'on indique la symétrie à opérer.
4. D'une manière générale, si l'intervalle d'étude est $[a,b]$, on peut considérer $x(a+b-t)$ et $y(a+b-t)$. S'il y a des relations intéressantes, on réduit l'intervalle à l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ (ou $[\frac{a+b}{2}, b]$) et l'on indique la symétrie à opérer.

exemple 6:

- Soit $I = [-4,4]$. Quand t décrit $[0,4]$, $-t$ décrit
- Soit $I = [0,4]$. Quand t décrit $[0,2]$, $4-t$ décrit
- Soit $I = [1,3]$. Quand t décrit $[2,3]$, $4-t$ décrit
- Soit $I = [1,3]$. Quand t décrit $[1,2]$, décrit $[2,3]$

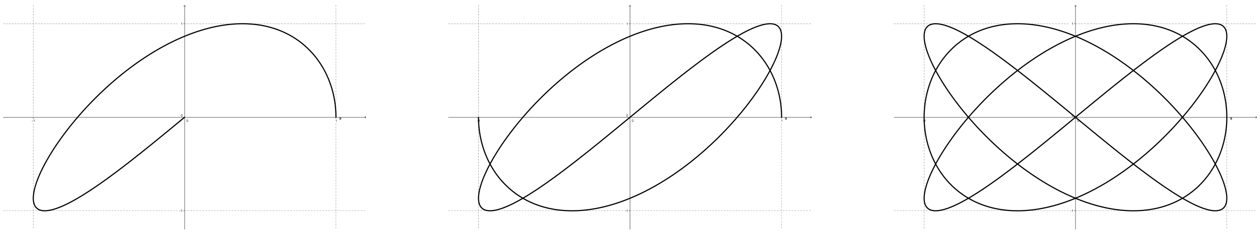
exemple 7:

Réduction de l'intervalle de l'étude pour $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \frac{\sin^2 t}{2+\sin t}) \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos^3 t, \sin^3 t) \end{array}$

exemple 8:

On reprend l'exemple d'une courbe de Lissajou $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(3t),\sin(4t)) \end{array}$

1. La fonction x est-elle périodique? Si oui, indiquer sa période T_x.
2. La fonction y est-elle périodique? Si oui, indiquer sa période T_y.
3. En déduire une période de la fonction f.
4. Montrer que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$. Une fois tracés les points $M(t)$ avec t dans cet intervalle, quelle transformation géométrique doit-on opérer pour obtenir toute la courbe?
5. Montrer que l'on peut encore diviser par deux l'intervalle d'étude, et donner la transformation géométrique correspondante.



exemple 9: un exemple particulier de réduction d'intervalle d'étude

On considère la courbe paramétrée $(\mathbb{R},f)$ avec $\boxed{\begin{array}{rcl} f;\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2t^2-2t+1,(3t^2-3t+1)^2) \end{array}}$

1. Y-a-t-il une symétrie évidente?
2. Montrer qu'il existe un réel a tel que pour tout t réel on a $x(t)=x(2a-t)$.
3. Calculer $y(2a-t)$, et en déduire l'intervalle d'étude de f ainsi qu'une transformation géométrique laissant globalement invariante la courbe.

exemple 10:

On considère la courbe paramétrée $(x(t),y(t))=(t\ln t,\dfrac{\ln t}{t})$ avec $t\in I=]0,+\infty[$.

1. Déterminer $M(1/t)$
2. En déduire une symétrie qui laisse invariante la courbe, et la réduction de l'intervalle d'étude.

exemple 11: un autre exemple particulier

On considère la courbe paramétrée $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t+\sin t,\cos t) \end{array}$

1. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, comparer $f(t+2\pi)$ et $f(t)$.
   Quelle interprétation géométrique en faites-vous? Quel nouvel intervalle d'étude pouvez-vous considérer?
2. Montrer que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0,\pi]$.
   Une fois tracée la partie de courbe correspondante à $t\in[0,\pi]$, quelles transformations géométriques (et dans quel ordre) faut-il réaliser pour obtenir toute la courbe?

1.4 tangentes et demi-tangentes

définition 1: demi-tangente, tangente

Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t),y(t)) = M(t) \end{array}}$ une courbe paramétrée.

1. On appelle demi-tangente à droite (resp à gauche) au point $M(t_0)$ la limite, si elle existe, de la droite $(M(t_0)M(t))$ quand $t \to t_0^+$ (resp quand $t \to t_0^-$)
2. On appelle tangente au point $M(t_0)$ la limite, si elle existe, de la droite $(M(t_0)M(t))$ quand $t \to t_0$

La droite tangente au point $M(t_0)$ est donc défini comme la limite(si elle existe) des droites sécantes en $M(t_0)$

exemple 12: étude par le coefficient directeur

On considère la courbe paramétrée $(\mathbb{R},f)$ avec $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t^2,|t^4-t^2|) \end{array}}$

On souhaite étudier la courbe au voisinage du point $M(t=1)$

1. Montrer l'existence d'une demi-tangente à droite au point $M(1)$.
   Donner son équation, et étudier, localement, la position de la courbe par rapport à cette demi-tangente.
2. Même question à gauche.
3. Faire un dessin qui représente la courbe au voisinage du point $M(1)$

théorème 4: coefficient directeur

Si $\displaystyle\lim_{t\to t_0^+ (resp. t_0^-)} \frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$ existe alors la demi-tangente à droite [resp. à gauche] en $M(t_0)$ existe.

- Si cette limite est infinie alors la demi-tangente est verticale
- Si cette limite est finie, elle est égale au coefficient directeur de la demi-tangente.

remarque 1 (*rappel: droite tangente en une courbe définie par $y=\varphi(x)$ (première)*)

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- *Si φ est dérivable en $x_0 \in I$ alors en tout point $(x_0,\varphi(x_0))$ de $\mathcal{C}$ il existe une droite tangente.*
  Son coefficient directeur est $\varphi'(x_0)$ et son équation est $y = \varphi'(x_0).(x-x_0)+\varphi(x_0)$
- *Si φ n'est pas dérivable en x_0 mais que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ alors il y a une tangente verticale au point $(x_0,\varphi(x_0)) \in \mathcal{C}$*

théorème 5: La droite tangente en un point $M(t_0)$ est dirigée par le premier vecteur dérivé non nul

Soit Γ une courbe paramétrée (I,f), et $t_0 \in I$.
On note p l'ordre du premier vecteur dérivé non nul de f en t_0.
Alors:

1. La droite tangente en $M(t_0)$ à Γ existe
2. Le vecteur $\vec{f}^{(p)}(t_0)$ dirige la tangente
3. L'équation de la tangente en $M(t_0)$ est donc donnée par le déterminant $\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x^{(p)}(t_0) \\ y - y(t_0) & y^{(p)}(t_0) \end{vmatrix} = 0$

démonstration: Soit $t_0 \in I$ fixé.

- par définition de p on a $\vec{f}^{(1)}(t_0) = \vec{f}^{(2)}(t_0) = \vec{f}^{(3)}(t_0) = \cdots = \vec{f}^{(p-1)}(t_0) = \vec{0}$ et $\vec{f}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$
- La formule de Taylor-Youg à l'ordre p donne

$$\boxed{f(t) = f(t_0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{(t-t_0)^i}{i!} \vec{f}^{(i)}(t_0) + (t-t_0)^p \epsilon(t) \text{ avec } \lim_{t_0} \epsilon = \vec{0}}$$

  et donc ici $f(t) = f(t_0) + \dfrac{(t-t_0)^p}{p!} \vec{f}^{(p)}(t_0) + o((t-t_0)^p)$

  ce qui peut s'écrire encore $\boxed{\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \dfrac{(t-t_0)^p}{p!} \vec{f}^{(p)}(t_0) + o((t-t_0)^p)}$

- Pour $t \neq t_0$,
  la droite $(M(t_0),M(t))$, passe par le point fixe $M(t_0)$, et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = f(t) - f(t_0)$.
  Et donc également par tout vecteur non nul colinéaire à celui-ci,
  donc en particulier par le vecteur $\boxed{\dfrac{1}{(t-t_0)^p} . \overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \dfrac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{(t-t_0)^p} = \dfrac{\vec{f}^{(p)}(t_0)}{p!} + o(1)}$
  Lorsque $t \to t_0$ ce vecteur tend vers $\dfrac{\vec{f}^{(p)}(t_0)}{p!} \neq \vec{0}$.
  La sécante admet donc une position limite: la droite qui passe par le point $M(t_0)$ et qui est dirigée par le vecteur $\vec{f}^{(p)}(t_0)$

définition 2: point régulier, stationnaire, singulier

1. On dit que le point M_{t_0} est un point régulier de $\Gamma = (I,f)$ lorsque $f'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} \neq \vec{0}$. Dans le cas contraire, on dit que le point M_{t_0} est un point stationnaire ou singulier.
2. Si tous les points de la courbe sont réguliers , on dit que la courbe est régulière

remarque:

- *l'équation de la tangente à Γ en un point régulier $\mathrm{M_{t_0}}$ est donc donnée par le déterminant* $\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$ *et son coefficient directeur vaut* $\dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$
- *le point $M(t_0)$ est donc un point stationnaire ssi $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$.*
  (interprétation cinématique : cela correspond à une vitesse nulle. . .)
- *dans le cas où t_0 est une extrémité de I, la dérivée ne sera qu'une dérivée à droite ou une dérivée à gauche.*

définition 3: (on retrouvera ces définitions plus tard aussi)

Soit (I,f) une courbe paramétrée régulière de classe C^1(au moins), et $t \in I$
On appelle:

- vecteur unitaire tangent au point $M(t)$ le vecteur $\boxed{\vec{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{f'(t)}}{||\overrightarrow{f'(t)}||}}$
- vecteur unitaire normal au point $M(t)$ le vecteur $\vec{N}(t)$, qui est l'image de $\vec{T}(t)$ par la rotation d'angle $+\pi/2$
- repère de Frenet au point $M(t)$ le repère orthonormé direct $(M(t),\vec{T}(t),\vec{N}(t))$
- paramètre angulaire au point $M(t)$ le réel $\alpha(t)$ tel que $\boxed{\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t)).\vec{i} + \sin(\alpha(t)).\vec{j}}$

théorème 6: attention à des cas particuliers

La droite tangente en $M(t_0)$ existe ssi les deux droites demi-tangentes à gauche et à droite existent et qu'elles sont égales (c'est à dire lorsqu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires (mais pas forcément égaux!))

exemple 13: un exemple de cas très particulier

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considére la courbe paramétrée $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{cases} (\sin t, e^t - 1 - \lambda t) & \text{si } t \geqslant 0 \\ (2t, t^2) & \text{si } t < 0 \end{cases} \end{array}}$

1. Etudier l'existence de la demi-tangente à droite et à gauche au point $M(0)$
2. La courbe admet-elle une droite tangente au point $M(0)$? (on pourra envisager différents cas)

définition 4: point limite ou point asymptote

Soit $t_1 \in \overline{I} - I$.(càd "t_1 une extrémité(ouverte) de l'intervalle")
On dit qu'il y a un point limite lorsque $t \to t_1$ lorque f possède une limite (finie) lorsque $t \to t_1$. (c'est à dire lorsque $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ admettent des limites finies en t_1)

Pour étudier la pente de l'éventuelle demi- tangente en un point limite, on peut considérer :

$$\lim_{t\to t_1} \frac{y(t)-y_1}{x(t)-x_1} \qquad \text{où } x_1 = \lim_{t\to t_1} x(t) \text{ et } y_1 = \lim_{t\to t_1} y(t)$$

exemple 14:

étude du point limite dela courbe paramétrée $\boxed{\begin{array}{rcl} f:]-\infty,0[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\frac{e^t}{t}, t.e^t) \end{array}}$

exemple 15: étude de la demi-tangente en un point limite

On considère l'arc paramétré (I,f) et $\boxed{\begin{array}{rcl} f:I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\dfrac{t+1}{t^2}, \dfrac{t^2+1}{(t+1)^2}\right) \end{array}}$

On souhaite étudier la courbe lorsque $t \to +\infty$

- quand $t \to +\infty$, on a $x(t) \sim \dfrac{t}{t^2} = \dfrac{1}{t}$ et $y(t) \sim \dfrac{t^2}{t^2} = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = (0,1)$.
  Notons A le point de coordonnée $(0,1)$.
  On vient de prouver que $\boxed{A \text{ est un point limite de notre courbe paramétrée.}}$

- Etudions l'existence d'une éventuelle tangente (demi) en ce point.
  Nous allons procéder de deux manières différentes

  i) On étudie la pente de l'éventuelle tangente, en considérant le quotient $\dfrac{y(t)-1}{x(t)-0}$ et en étudiant sa limite en $+\infty$.
  Un calcul simple donne $\dfrac{y(t)-1}{x(t)-0} = \dfrac{-2t^3}{(1+t)^3} \sim \dfrac{-2t^3}{t^3} = -2$.
  On a prouvé que le quotient tend vers -2 lorsque $t \to \infty$, ceci prouve qu'il existe une tangente (ou plus exactement une demi-tangente) au point A, et que cette demi-tangente a pour coefficient directeur -2

  ii) On effectue un développement asymptotique quand $t \to \infty$.
  - $x(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{1}{t} + o(1/t)$
  - $y(t) = \cdots = 1 - \dfrac{2}{t} + \dfrac{4}{t^2} + o(1/t^2) = 1 - \dfrac{2}{t} + o(1/t)$
  - On a donc $M(t) = A + \dfrac{1}{t}(1,-2) + o(1/t)$, ce que l'on peut encore écrire:
    $\overrightarrow{AM(t)} = \dfrac{1}{t}(1,-2) + o(1/t) = \dfrac{1}{t}((1,-2) + o(1))$
    ce qui donne $\boxed{t.\overrightarrow{AM(t)} = (1,-2) + o(1) \longrightarrow (1,-2) \text{ lorsque } t \to +\infty}$
    On a prouvé que la direction de la sécante tend vers le vecteur $(1,-2)$, ce qui prouve que la tangente en A existe et qu'elle est dirigée par le vecteur $(1,-2)$

- La tangente(on la note T) est donc la droite qui passe par le point $A(0,1)$ et de vecteur directeur $(1,-2)$. Son équation est donc $\begin{vmatrix} x-0 & 1 \\ y-1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ soit $\boxed{y + 2x - 1 = 0}$
- On peut remarquer qu'il est possible ici, non seulement d'étudier la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point A, mais bien d'étudier leur position relative pour tout t réel.
  En effet, étudier la position relative de la courbe par rapport à la droite T, c'est déterminer le signe de $y(t) + 2x(t) - 1$.
  Le calcul donne $y(t) + 2x(t) - 1 = \dfrac{2(3t^2+3t+1)}{(t+1)^2t^2}$

  i) Si l'on souhaite juste étudier la position relative au voisinage du point A, il suffit de déterminer le signe de la quantité ci-dessus lorsque t est aun voisinage de $+\infty$: on peut donc se contenter d'effectuer un équivalent! On trouve $\dfrac{6}{t^2}$, quantité qui est strictement positive. On peut donc affirmer, qu'au voisinage du point A la courbe est située au dessus de la droite T. C'est un renseignement qui n'est que local: en particulier, on ne peut dire à partir de quelle valeur de t, les points $M(t)$ sont situés au dessus de T. Est-ce pour $t \geqslant 100$? $t \geqslant 10^6$? $t \geqslant 10^{2018}$?

  ii) En revanche, si l'on souhaite déterminer la position globale de la courbe par rapport à la tangente, il faut déterminer pour tout t réel le signe de la quantité $\dfrac{2(3t^2+3t+1)}{(t+1)^2t^2}$.
  Ici, c'est particulièrement simple car:
  - le dénominateur est à l'évidence positif.
  - le numérateur est aussi strictement positif car c'est un polynôme du second degré, de coefficient dominant $3 > 0$, avec un discriminant $\Delta = -3 < 0$

  Conclusion: On vient de justifier ainsi que pour tout t le point $M(t)$ est au dessus de la droite T, c'est à dire que la courbe paramétrée est entièrement au-dessus de T.

1.5 position de la courbe par rapport à la tangente

définition 5: point birégulier

On dit que le point $\mathrm{M_{t_0}}$ est un point birégulier lorsque la famille $(\vec{f}'(t_0),\vec{f}''(t_0))$ est libre.
interprétation cinématique : un point est birégulier lorsque sa vitesse et son accélération ne sont pas colinéaires. Ces deux vecteurs constituent alors une base du plan.
rem: $\mathrm{M_{t_0}}$ *est alors forcément un point régulier aussi car* $\vec{f}'(t_0) \neq \vec{0}$ *nécessairement*

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne $f(t) = f(t_0)+(t-t_0.f'(t_0)+\dfrac{(t-t_0)^2}{2}f^{(2)}(t_0)+o((t-t_0)^2)$, soit encore $\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = (t-t_0).f'(t_0) + \dfrac{(t-t_0)^2}{2}f^{(2)}(t_0) + o((t-t_0)^2)$

La famille $(\vec{f}'(t_0),\vec{f}''(t_0))$ étant libre, on peut considérer le repère $(\mathrm{M_{t_0}},\vec{f}'(t_0),\vec{f}''(t_0))$ et notons (X,Y) les coordonnées de $M(t)$ dans ce repère.
Par définition ceci signifie que $\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = X.\vec{f}'(t_0) + Y.\vec{f}^{(2)}(t_0)$,
on a donc par identification $\begin{cases} X = (t-t_0) + o((t-t_0)^2) & \underset{t\to t_0}{\sim} t - t_0 \\ Y = \dfrac{(t-t_0)^2}{2} + o((t-t_0)^2) & \underset{t\to t_0}{\sim} \dfrac{(t-t_0)^2}{2} \end{cases}$

On remarque alors que $Y \underset{t_0}{\sim} \dfrac{X^2}{2}$ *et que* X *change de signe.*

Ces équivalents permettent de dessiner l'allure de la courbe au voisinage du point $\mathrm{M_{t_0}}$ car ils nous donnent le signe de X et de Y en t_0^- et t_0^+

exemple 16:

On souhaite étudier le point $M(0)$ de la courbe paramétrée $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (1+t^2+t^3,t^2.\sin t) \end{array}}$

- un développement limité donne

$$f(t) = (1{,}0) + t^2(1{,}0) + t^3(1{,}1) + o(t^3) = M(0) + t^2\vec{I} + t^3\vec{J} + o(t^3)$$

  en ayant noté $\vec{I} = (1{,}0) = \vec{i}$ et $\vec{J} = (1{,}1) = \vec{i} + \vec{j}$.
- ce qui s'écrit encore $\overrightarrow{M(0)M(t)} = t^2.\vec{I} + t^3\vec{J} + o(t^3)$
- Considérons le repère $(M(0),\vec{I},\vec{J})$ et notons (X,Y) les coordonnées de $M(t)$ dans ce repère.

On a donc
$\begin{cases} X = t^2 + o(t^3) & \underset{t\to 0}{\sim} t^2 \\ Y = t^3 + o(t^3) & \underset{t\to 0}{\sim} t^3 \end{cases}$

exemple 17:

On suppose que pour $t \to 0$ on a $f(t) = (1,-1) + t(1{,}1) + t^2(2{,}2) + t^3(0{,}1) + o(t^3)$.
Dessiner l'allure de la courbe pour t proche de 0

méthode 2: point d'inflexion, de rebroussement, d'allure ordinaire

On effectue un DL de x et de y en t_0 jusqu'à l'obtention de deux vecteurs indépendants. Ces deux vecteurs constitueront avec le point $M(t_0)$ un repère dans lequel les coordonnées seront plus simples.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + (t-t_0)^p \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \cdots + (t-t_0)^q \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + o((t-t_0)^q$$

On note:

- $\vec{I} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ le premier vecteur non nul du DL
- $\vec{J} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ est le premier vecteur non colinéaire à $\vec{I}$
- $(X(t),Y(t))$ les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(M(t_0),\vec{I},\vec{J})$

On a alors

$$\boxed{X(t) \underset{t_0}{\sim} (t-t_0)^p \text{ et } Y(t) \underset{t_0}{\sim} (t-t_0)^q}$$

On fait ensuite un dessin grâce à la parité de p et de q puis on conclut.

remarques:

- le DL peut être obtenu soit par opérations sur les DLs de référence ou par la formule de Taylor Young.
- il ne suffit pas de donner p et q et de conclure: il faut écrire le DL et refaire le raisonnement ci-dessus.

remarque 2

on montre que:

- *p est l'ordre de la première dérivée non nulle de f en t_0*
- *q est le plus petit entier tel que $\vec{f}^{(q)}(t_0)$ soit NON colinéaire à $\vec{f}^{(p)}(t_0)$ (forcément $q > p$)*

remarque 3

1. *Un point birégulier est un point pour lequel $(p,q) = (1,2)$: il s'agit toujours d'un point d'allure ordinaire*
2. *Comme les points biréguiers sont toujours des points d'allure ordinaire, on peut en déduire que les éventuels points de rebroussement et points d'inflexion sont cachés parmi les points NON biréguliers. On les cherche donc en résolvant*

$$\det(f'(t_0),f^{(2)}(t_0)) = \begin{vmatrix} x'(t_0) & x''(t_0) \\ y'(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix} = x'(t_0)y''(t_0) - y'(t_0)x''(t_0) = 0$$

3. *Un point de rebroussement est nécessairement un point singulier car p doit être pair*

théorème 7: Taylor-Young

Soit $f \in C^p(I,\mathbb{R}^2)$.
Alors

i) f admet un DL à l'ordre p en tout point t_0 de I,

ii) et l'on a :

$$\boxed{f(t) = f(t_0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{(t-t_0)^i}{i!} \vec{f}^{(i)}(t_0) + (t-t_0)^p \epsilon(t) \text{ avec } \lim_{t_0} \epsilon = \vec{0}}$$

interprétation géométrique

théorème 8: dérivée d'un produit scalaire

Soient $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (f_1(t),f_2(t)) \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} g : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (g_1(t),g_2(t)) \end{array}}$ deux fxs vectorielles de classe $C^p, p \geqslant 1$

On pose la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} h : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & < f(t),g(t) >= f_1(t).g_1(t) + f_2(t).g_2(t) \end{array}}$

Alors:

i) h est dérivable sur I et $\boxed{h' = (< f, g >)' =< f', g > + < f, g' >}$

ii) h est de classe C^p sur I et et l'on a $\boxed{h^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} < f^{(k)}, g^{(p-k)} >}$

1.6 point multiple ou point double

définition 6:
On dit que le point M est un point multiple ou un point double lorsque

$$\exists t_1 \neq t_2, M = f(t_1) = f(t_2) = M_{t_1} = M_{t_2}$$

méthode 3: détermination des points doubles

Pour déterminer les éventuels points doubles, on résout le système $\begin{cases} x(t_1) & = x(t_2) \\ y(t_1) & = y(t_2) \end{cases}$ avec $t_1 \neq t_2$.
Dans certains cas, il est intéressant d'imposer $t_1 < t_2$
Suivant que les expressions soient polynomiales ou trigonométriques, il est important de se rappeler que

i) $\cos(t_1) = \cos(t_2) \iff \begin{cases} t_1 \equiv t_2 & [2\pi] \\ \text{ou} & \\ t_1 \equiv -t_2 & [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 = t_2 + 2k\pi & \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & \\ t_1 = -t_2 + 2k\pi & \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

ii) $\sin(t_1) = \sin(t_2) \iff \begin{cases} t_1 \equiv t_2 & [2\pi] \\ \text{ou} & \\ t_1 \equiv \pi - t_2 & [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 = t_2 + 2k\pi & \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & \\ t_1 = \pi - t_2 + 2k\pi & \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

iii) $\tan t_1 = \tan t_2 \iff t_1 \equiv t_2 [\pi] \iff t_1 = t_2 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

iv) t_2 est racine du polynôme P ssi $P(t_2) = 0$ ssi P se factorise par $X - t_2$

Exemple:
On considère l'arc paramétré $f : t \mapsto \left(\dfrac{t}{t^2-1}, \dfrac{t^2}{t-1}\right)$ *avec* $t \in \mathbb{R} - \{-1, +1\}$

1. *Montrer que la courbe possède un unique point double, et donner ses coordonnées*
2. *Montrer qu'en ce point les tangentes sont perpendiculaires.*

1. *Soit* $\boxed{t_1 < t_2}$.
   On a les équivalences

   $x(t_1) = x(t_2) \iff t_1(t_2^2 - 1) = t_2(t_1^2 - 1) \iff t_1t_2^2 - t_2t_1^2 - t_1 + t_2 = 0 \iff (t_2 - t_1)(t_1t_2 + 1) = 0$
   et
   $y(t_1) = y(t_2) \iff t_1^2(t_2 - 1) = t_2^2(t_1 - 1) \Leftrightarrow t_1^2t_2 - t_2^2t_1 + t_2^2 - t_1^2 = 0 \Leftrightarrow (t_1 - t_2)(t_1t_2 - (t_1 + t_2)) = 0$

   On a donc $f(t_1) = f(t_2) \iff \begin{cases} t_1t_2 + 1 & = 0 \\ t_1t_2 - (t_1 + t_2) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1t_2 & = -1 \\ t_1 + t_2 & = -1 \end{cases}$
   t_1 *et* t_2 *sont les solutions de l'équation* $T^2 + T - 1 = 0$ *pour laquelle* $\Delta = 5 > 0$. *Il existe donc bien deux racines réelles distinctes à cette équation* $t_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ *et* $t_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
   Pour déterminer les coordonnées du point double,
   on pourrait maintenant calculer $x(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2})$ *et* $y(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2})$... *Mais il y a plus astucieux!*
   En effet, en utilisant le fait que $t_1^2 + t_1 - 1 = 0$ *on a directement* $x(t_1) = \dfrac{t_1}{t_1^2 - 1} = \dfrac{1 - t_1^2}{t_1^2 - 1} = -1$
   et $y(t_1) = \dfrac{t_1^2}{t_1 - 1} = \dfrac{t_1^2}{-t_1^2} = -1$. $\boxed{\text{Le point double est donc le point de coordonées } (-1, -1)}$
2. *Là aussi il y a une astuce!... (coefficient directeur)*

1.7 branches infinies

méthode 4: Etude des branches infinies

On dit qu'il y a un branche infini lorsque "le point part à l'infini", c'est à dire lorsque x et/ou y tendent vers $\pm\infty$.
La question que l'on se pose alors est de savoir si la courbe se rapproche d'une droite: on dit alors qu'une telle droite est asymptote à la courbe

- si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$

  alors $\boxed{\text{la courbe admet } \underline{\text{une droite asymptote horizontale}} \text{ d'équation } y = y_0}$

- si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$

  alors $\boxed{\text{la courbe admet } \underline{\text{une droite asymptote verticale}} \text{ d'équation } x = x_0}$

- si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \infty$ alors on étudie $A = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$
  - si A n'existe pas , on ne dit rien.
  - si $A = \infty$ alors
    la courbe n'admet pas de droite asymptote mais juste <u>une branche parabolique</u> de direction Oy.

  - si $A = 0$ alors
    la courbe n'admet pas de droite asymptote mais juste <u>une branche parabolique</u> de direction Ox.

  - si $A \in \mathbb{R}^*$ alors on étudie $B = \lim\limits_{t\to t_0} y(t) - Ax(t)$
    - si B n'existe pas alors *la courbe n'admet pas de droite asymptote .*

    - si $B = \infty$ alors
      la courbe n'admet pas de droite asymptote mais juste <u>une branche parabolique</u> de dir. $y = Ax$

    - si $B \in \mathbb{R}$, $\boxed{\text{la courbe admet } \underline{\text{une droite asymptote oblique}} \text{ d'équation } y = Ax + B}$
      Dans ce cas , on peut chercher la position de la courbe par rapport à l'asymptote en étudiant le signe de $y(t) - Ax(t) - B$. *Pour cela, on peut utiliser les dl...*

exemple 18:

Etude au voisinage de 1 de la courbe paramétrée $t \mapsto (\dfrac{t}{t^2-1}, \dfrac{t^2}{t-1})$.

- On a $\lim\limits_{t\to 1^+} x(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} y(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 1^-} x(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} y(t) = -\infty$
- On forme le quotient $\dfrac{y(t)}{x(t)}$.
  On a $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^2}{t-1}.\dfrac{(t-1)(t+1)}{t} = t(t+1) \to 2$ lorsque $t \to 1$ (1^+ ou 1^-)
- Comme cette limite est finie et non nulle, on étudie $\lim\limits_{t\to 1} y(t) - 2x(t)$
  On a $y(t) - 2x(t) = \cdots = \dfrac{t(t+2)}{t+1} \to \dfrac{3}{2}$ lorsque $t \to 1$
- En conclusion, on peut dire que la courbe possède une droite asymptote oblique; elle a pour équation $y - 2x - 3/2 = 0$
- On peut étudier la position relative de la courbe par rapport à son asymptote.
  Si l'on veut uniquement un renseignement local, il suffit de savoir si la quantité $y(t) - 2x(t)$ tend vers $3/2$ par valeurs supérieures ou inférieures.
  On pose $t = 1 + h$ et on a

$$\begin{aligned} y(1+h) - 2x(1+h) - \frac{3}{2} = \frac{(1+h)(3+h)}{2+h} - \frac{3}{2} &= \frac{3}{2}.\frac{(1+h)(1+h/3)}{1+h/2} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}\left((1+h)(1+h/3).(1-h/2+o(h))\right) - \frac{3}{2} \\ &= \frac{11h}{6} + o(h) \underset{0}{\sim} \frac{11h}{6} \end{aligned}$$

  Conclusion:
  - lorsque $t \to 1^+$ (càd $h \to 0^+$), la courbe est au dessus-de l'asymptote
  - lorsque $t \to 1^-$ (càd $h \to 0^-$), la courbe est en dessous-de l'asymptote
- Ici, on peut même étudier la position globale: en effet, on a $y(t) - 2x(t) - 3/2 = \dfrac{(2t+3)(t-1)}{2(t+1)}$

- Etudier la branche infinie lorsque $t \to -1$
- Etudier la branche infinie lorsque $t \to +\infty$
- Etudier la branche infinie lorsque $t \to -\infty$

1.8 exemples d'étude de courbes paramétrées

.

PLAN D'ETUDE :

1. On cherche les ensemble de définition de x et de y
2. On cherche les symétries et l'ensemble d'étude
3. On justifie la dérivabilité et on calcule les dérivées x' et y'. On cherche leur signe
4. Dans un tableau à cinq lignes : on écrit (dans cet ordre) le ou les intervalle(s) où varie t,
   le signe de x',
   les variations de x,
   les variations de y,
   le signe de y'
5. On place toutes les valeurs aux bords des intervalles d'étude
6. On étudie les points stationnaires
7. On étudie les branches infinies
   (uniquement dans le cas où les points partent à l'infini)
8. On étudie les éventuels points doubles
9. On trace la courbe

2 Equation cartésienne $F(x,y) = 0$ d'une courbe plane

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1.
La courbe d'équation cartésienne $F(x,y) = 0$ est l'ensemble des points $M = (x,y)$ tels que $F(x,y) = 0$
Par exemple le cercle trigonométrique a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - 1 = 0$

méthode 5:
Si on a une courbe paramétrée $t \mapsto M(t)$, on obtient une équation cartésienne <u>en éliminant</u> t.
exemples:

1. $(x(t),y(t)) = (\sin(t), \cos(t)) \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$
2. $(x(t),y(t)) = (\cos^2 t, \sin^2 t) \Longrightarrow x + y = 1$
3. $(x(t),y(t)) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \Longrightarrow x^2 - y^2 = 1$
4. $(x(t),y(t)) = (\sin t, \cos^2 t) \Longrightarrow y + x^2 = 1$

Vous notez que ce n'est qu'une implication: à chaque fois il faut établir la réciproque, et c'est lors de cette étape que parfois d'autres conditions apparaissent.

Reprenons le deuxième exemple ci-dessus:
On note Γ *le support de la courbe paramétrée* $\begin{cases} x(t) &= \cos^2 t \\ y(t) &= \sin^2 t \end{cases}, t \in [0,\frac{\pi}{2}]$.
Nous allons déterminer une équation cartésienne de Γ

- *On remarque que pour tout réel t on a* $x(t) + y(t) = 1$.
  Ceci nous permet d'affirmer que les points $M(t)$ *sont tous sur la droite* D *d'équation* $x + y = 1$.
  Autrement dit, on a prouvé l'inclusion $\boxed{\Gamma \subset D}$

- *Etudions maintenant la réciproque.*
  C'est à dire posons nous la question "Tout point de D *est-il un point de* Γ*?"*

- *On commence par remarquer que pour tout* t *réel, on a* $\cos^2 t \in [0,1]$. *Ainsi tous les points de la droite* D *qui ont une abscisse strictement négative ou strictement supérieure à un ne peuvent faire partie de* Γ. *Ceci prouve que* $\boxed{D \not\subset \Gamma}$ *mais que* $\boxed{\Gamma \subset D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0,1] \text{ et } x + y = 1\}}$

- *Soit* $P(x_0,y_0)$ *un point de* D_1 *(on a donc* $x_0 \in [0,1]$ *et* $x_0 + y_0 = 1$*)*
  Nous allons justifier que P *appartient aussi à* Γ,
  pour cela nous allons justifier qu'il existe un réel t tel que $P = M(t) = (x(t),y(t))$.
  Il est facile de montrer que la fonction $\boxed{\begin{array}{cccc} x: [0,\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos^2(t) \end{array}}$ *a pour ensemble image* $[0,1]$
  (utiliser le théorème des valeurs intermédiaires par exemple).
  Ceci permet d'affirmer qu'il existe un réel t tel que $x_0 = x(t) = \cos^2 t$.
  Comme $P(x_0,y_0)$ *est un point de* D_1, *on a* $x_0 + y_0 = 1$, *c'est à dire que* $y_0 = 1 - x_0$.
  On a donc $y_0 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$.
  Au final, on a prouvé qu'il existe un réel t tel que $(x_0,y_0) = (\cos^2 t, \sin^2 t) = (x(t),y(t))$,
  soit encore qu'il existe un réel t tel que $P = M(t)$. *Donc* $P \in \Gamma$.

  On a montré que tout point P *de* D_1 *était aussi dans* Γ, *càd* $\boxed{D_1 \subset \Gamma}$

- *En conclusion, on a montré que* $\Gamma = D_1$ *est constitué des points de* D *qui ont leur abscisse dans l'intervalle* $[0,1]$. *C'est à dire, c'est le segment* $[AB]$ *avec* $A(0,1)$ *et* $B(1,0)$

exemple 19:

On note Γ le support de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) &= t + \dfrac{1}{t} \\ y(t) &= t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}^* = I.$

Nous allons déterminer une équation cartésienne de Γ

- Pour tout $t \in I$, il est clair que $x(t)^2 = t^2 + 2 + \dfrac{1}{t^2} = y(t) + 2$. Ceci nous permet d'affirmer que tous les points $M(t)\Gamma$ sont sur $\boxed{\text{la courbe } C \text{ d'équation cartésienne } y + 2 - x^2 = 0}$
- Etudions maintenant la réciproque.
  C'est à dire posons nous la question "Tout point de C est-il un point de Γ?"
- Soit $P(x_0,y_0)$ un point de C.
  Se demander si P est un point de Γ, c'est se demander s'il existe $t \in I$ tel que $(x(t),y(t)) = (x_0,y_0)$.
- On commence par considérer l'équation $x(t) = x_0$. Nous allons montrer de deux manières différentes que cette équation possède une solution si et seulement si $|x_0| \geqslant 2$.
  i) On étudie la fonction x sur I.
  En étudiant ses variations et ses limites aux bornes de l'ensemble de définition(à faire chez vous), on trouve que l'ensemble image de x est $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$.
  ii) On résout algébriquement l'équation $t + \dfrac{1}{t} = x_0$.
  Cette équation équivaut au système $\begin{cases} t^2 - xt + 1 &= 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$. On remarque que 0 n'est jamais solution de $t^2 - x_0 t + 1 = 0$, on peut donc écrire que $t + \dfrac{1}{t} = x_0 \iff t^2 - x_0 t + 1 = 0$. Or cette équation du second degré possède une solution(au moins) réelle si et seulement si $\Delta = x_0^2 - 4 \geqslant 0$. Ce qui donne bien la condition $|x_0| \geqslant 2$
- On suppose maintenant que $|x_0| \geqslant 2$ et on note t un réel (on vient de prouver sons existence) tel que $x(t) = x_0$.
  Comme $P \in C$, on a $y_0 + 2 - x_0^2 = 0$. On a donc $y_0 = x_0^2 - 2 = \left(t + \dfrac{1}{t}\right)^2 - 2 = t^2 + 2 + \dfrac{1}{t^2} - 2 = y(t)$
- Au final,
  on a montré qu'il existe un réel $t \in I$ tel que $(x_0,y_0) = (x(t),y(t))$ si et seulement si $|x_0| \geqslant 2$
- En conclusion, on a montré que Γ est la parabole d'équation $y = x^2 - 2$ privé des points qui ont une abscisse dans l'intervalle $]-2,2[$, càd $\boxed{\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2 - 2 \text{ et } |x| \geqslant 2\}}$

exemple 20: le folium de Descartes

Le folium de Descartes a pour représentation paramétrique : $x(t) = \dfrac{t}{1+t^3}, y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3}$ avec $t \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

Montrer qu'une équation cartésienne de son support est : $x^3 + y^3 - xy = 0$
(indication: on pourra introduire quand $x \neq 0$ le paramètre $t = \dfrac{y}{x}$)

Réciproquement, si on a une équation cartésienne d'une courbe Γ, il est plus difficile d'obtenir une paramétrisation. On admet l'existence d'un paramétrage local de classe C^1, c'est à dire pour un point $M_0 = (a,b)$ de la courbe Γ, on admet qu'il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une boule de centre M_0 et de rayon r tels que les points de la courbe proches du point M_0, càd $B(M_0,r) \cap \Gamma$, sont représentés par $t \in I \to M(t) = (x(t),y(t))$ courbe paramétrée de classe C^1 (utilisation du théorème des fonctions implicites qui est hors-programme)

théorème 9: ... et définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1.
On considére la courbe Γ d'équation cartésienne $F(x,y) = 0$

1. Un point $M_0 = (x_0,y_0)$ de Γ est dit <u>régulier</u> lorsque $\overrightarrow{grad_{M_0}}(F) \neq 0$
2. La droite tangente en point régulier M_0 de la courbe est la droite qui passe par le point M_0 et qui a pour vecteur normal $\overrightarrow{grad_{M_0}}(F)$
3. L'équation de la tangente est donc $(x - x_0)\dfrac{\partial F}{\partial x}(M_0) + (y - y_0)\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0) = 0$

Attention: suivant que la courbe est donnée par une équation cartésienne ou une représentation paramétrique, la définition de point régulier n'est pas la même!

exemple 21:

Le cercle trigonométrique a pour équation cartésienne $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Soit $M_0 = (x_0,y_0)$ un point du cercle.
On a $\overrightarrow{grad_{M_0}}(F) = (2x_0,2y_0) \neq (0,0)$ car $x_0^2 + y_0^2 = 1$
Le point M_0 est régulier: la tangente au cercle en M_0 est la droite qui passe par le point (x_0,y_0) et de vecteur normal $(2x_0,2y_0)$. Son équation est donc $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = 0$, soit $x_0x + y_0y - (x_0^2 + y_0^2) = 0$
Or $x_0^2 + y_0^2 = 1$ (!) donc $\boxed{\text{l'équation de la tangente en } M_0 \text{ est simplement } x_0x + y_0y - 1 = 0}$

On montre de même que tout point du cercle d'équation $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ est régulier et que la tangente en un point $M_0(x_0,y_0)$ de ce cercle a pour équation $(x_0 - 2)x + (y_0 + 1)y - 2x_0 + y_0 - 4 = 0$

définition 7: ... et théorème

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1.
On appelle <u>lignes de niveau de F</u> les courbes Γ_k d'équation cartésienne $F(x,y) = k$ où k est une contante réelle

Soit M_0 un point d'une ligne de niveau Γ_k.
Si en ce point le gradient de F n'est pas nul, il est orthogonal à la tangente en M_0 à la courbe Γ_k et est dirigé dans le sens des valeurs croissantes de F

- exemple: pour $\boxed{\begin{array}{llll} F : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^2 \end{array}}$
  - pour $\lambda < 0$ la ligne de niveau d'éq. $x^2 + y^2 = \lambda$ est l'ensemble vide
  - pour $\lambda = 0$ la ligne de niveau d'éq. $x^2 + y^2 = 0$ est réduite au point $O(0,0)$
  - pour $\lambda > 0$ la ligne de niveau d'éq. $x^2 + y^2 = \lambda$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\lambda}$
- exemple: pour $\boxed{\begin{array}{llll} F : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2 - y \end{array}}$
  - les lignes de niveau sont des paraboles qui possèdent l'axe des ordonnées comme axe de symétrie

3 Complément: coordonnées polaires

On se place dans le plan euclidien usuel, muni du repère orthonormé direct $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$.

On note $\vec{u}(\theta) = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}$.
Le repère $\mathcal{R}(0,\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$ est aussi un repère orthonormé direct du plan euclidien.

Un point M du plan est représenté par deux coordonnées (x,y) c'est à dire $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ou $M = O + x\vec{i} + y\vec{j}$
On peut représenter tout point M du plan autre que le pôle O par :

- l'angle de droites $\theta = (O\vec{i},\overrightarrow{OM})$ défini à π près.
- $r \in \mathbb{R}^*$

tels que $\boxed{\overrightarrow{OM} = r.(\cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}) = r.\vec{u}(\theta)}$ c'est-à-dire $\boxed{M = O + r.\vec{u}(\theta)}$

remarque 4 (*liens avec les coordonnées cartésiennes*)

- *Il est simple de passer des coordonées polaires aux coordonnées cartésiennes. En effet :* $\begin{cases} x = & r.\cos\theta \\ y = & r.\sin\theta \end{cases}$
- *En revanche, il est parfois difficile de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires si l'on souhaite établir une formule qui "marche" tout le temps... En effet, si $x \neq 0$ on a toujours $\tan\theta = \frac{y}{x}$ mais pas toujours $\theta = \arctan\frac{y}{x}$!*

remarque 5

- *Contrairement aux coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires (r,θ) d'un point ne sont pas uniques. Par exemple, le point A de coordonnées cartésiennes $(1,1)$ a pour coordonnées polaires $(\sqrt{2},\pi/4)$ mais aussi $(-\sqrt{2},5\pi/4)$ et encore $(\sqrt{2},2009\pi/4)$...*
- *D'une manière plus générale, tout point M autre que le pôle possède une infinité de coordonnées polaires de deux types possibles : $(r,\theta + 2k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $(-r,\theta + \pi + 2k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ où $r = ||\overrightarrow{OM}|| > 0$ et θ désigne une mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$*
- *si l'on souhaite avoir l'unicité du couple de coordonnées polaires pour tout point du plan autre que O, on peut imposer des conditions sur r et/ou θ. Par exemple , $(r > 0,\theta \in [0,2\pi[)$ ou $(r > 0,\theta \in]-\pi,\pi])$ ou encore $(r \in \mathbb{R}^*,\theta \in [0,\pi[)$.*
- *le point O n'a pas d'angle polaire, mais est caractérisé par $r = 0$*

exemple 22: ellipse

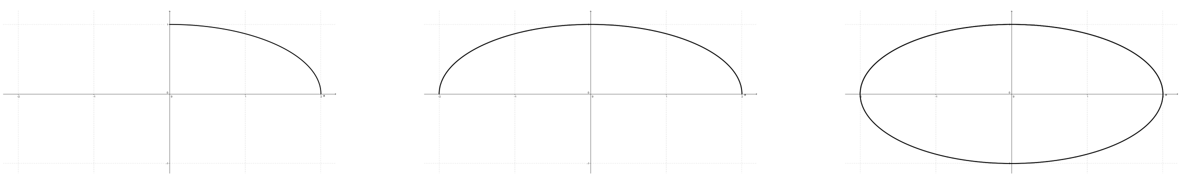
Une ellipse est une courbe qui, dans un repère orthonormé bien choisi, possède une représentation paramétrique du type $\boxed{\begin{cases} x(t) &= a\cos t \\ y(t) &= b\sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$ avec $0 < a < b$ deux réels fixés.

- Telle que la courbe paramétrée est donnée, l'étude des fonctions x et y doit se faire sur $\mathbb{R}$ tout entier. Nous allons voir que l'on peut restreindre l'étude à un intervalle beaucoup plus petit.
- Les fonctions x et y sont clairement $2\pi-$périodique.
  Ceci signifie que pour tout réel t on a $M(t+2\pi) = M(t)$. Il suffit donc d'étudier et de représenter la courbe paramétrée sur un intervalle semi-ouvert de longueur 2π pour obtenir toute la courbe.

- La fonction x est paire et la fonction y est impaire.
  Ceci nous permet de dire que les points $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des abscisses. On peut donc faire l'étude de nos fonctions sur $[0,\pi]$ et dessiner les points $M(t)$ pour t variant dans cet intervalle. On effectue ensuite la symétrie par rapport à l'axe $(0x)$: ce qui équivaudra à dessiner les points $M(-t)$ avec $t \in [0,\pi]$, c'est à dire à dessiner les points $M(t)$ avec $t \in [-\pi,0]$.
  Au total, on aura obtenu toute la courbe, car on aura dessiné les points $M(t)$ pour $t \in [-\pi,\pi]$

- On peut remarquer que pour tout $t \in [0,\pi]$, on a $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$.
  Ceci nous permet de dire que les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Comment va-t-on profiter de cette symétrie pour réduire encore l'intervalle d'étude?
  On remarque que lorsque t décrit d'intervalle $[0,\pi]$ le réel $\pi - t$ décrit... encore $[0,\pi]$. Ceci signifie que lorque l'on dessine les points $M(t)$ avec $t \in [0,\pi]$ on va dessiner une courbe qui est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Imaginons maintenant que t décrive l'intervalle $[0,\pi/2]$, on aura alors $\pi - t$ qui décrira l'intervalle $[\pi/2,\pi]$. Ceci prouve que si l'on dessine les points $M(t)$ avec $t \in [0,\pi/2]$, en effectuant la symétrie par rapport à $(0y)$ on aura dessiner les points $M(t)$ avec $t \in [\pi/2,\pi]$.
  Et ainsi au total, on aura dessiné les points $M(t)$ pour $t \in [0,\pi]$

- En conclusion,on fera l'étude des fonctions x et y uniquement sur l'intervalle $[0,\pi/2]$ et l'on tracera la courbe correspondant à cet intervalle. Puis on effectuera une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et on terminera par effectuer une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



$t \in [0,\pi/2]$ $\qquad$ $t \in [0,\pi]$ $\qquad$ $t \in [-\pi,\pi]$

- On sait que si une courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et celui des ordonnées, alors elle est aussi symétrique par rapport au point O. Pour trouver directement ce résultat, il suffit de considérer la composition des fonctions sur le paramètre t, à savoir $t \mapsto -t$ et $t \mapsto \pi - t$.
  Suivant l'ordre de composition, on trouve $t \mapsto \pi - (-t) = \pi + t$ et $t \mapsto -(\pi - t) = t - \pi$.
  Or pour tout t réel on a $\begin{cases} x(\pi+t) = x(t-\pi) &= -x(t) \\ y(\pi+t) = y(t-\pi) &= -y(t) \end{cases}$.
  On retrouve bien la propriété:
  "le point $M(t+\pi) = M(t-\pi)$ est symétrique de $M(t)$ par rapport au point O."