LES CONIQUES

Table des matières

1 Changement de repère (rappels)

1.1 changement d'origine uniquement

- Soit $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé: on note (x,y) les coordonnées dans ce repère.

$$\boxed{M(x,y) \text{ dans } \mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \Longleftrightarrow M = O + x.\vec{i} + y.\vec{j}}$$

- Soit Ω un point du plan, notons (x_Ω,y_Ω) ses cordonnées dans $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$

$$\text{On a donc } \boxed{\overrightarrow{O\Omega} = x_\Omega.\vec{i} + y_\Omega.\vec{j}}$$

- Soit $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ un autre repère: on note (X,Y) les coordonnées dans ce repère.

$$\boxed{M(X,Y) \text{ dans } (\Omega,\vec{i},\vec{j}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = X.\vec{i} + Y.\vec{j} \Longleftrightarrow M = \Omega + X.\vec{i} + Y.\vec{j}}$$

- grâce à la relation de Chasles, on peut écire que $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\Omega}$

  ce qui donne $X.\vec{i} + Y.\vec{j} = x.\vec{i} + y.\vec{j} - x_\Omega.\vec{i} - y_\Omega.\vec{j}$, en identifiant, on trouve $\boxed{\begin{cases} X &= x - x_\Omega \\ Y &= y - y_\Omega \end{cases}}$
- La formule ci-dessus est la formule du changement de repère lorsque l'on garde la même base: on retiendra qu'il ne s'agit que de faire un "décalage"(translation) sur les coordonnées

1.2 changement de base uniquement

- Soit $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé: on note (x,y) les coordonnées dans ce repère.

$$\boxed{M(x,y) \text{ dans } \mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} \Longleftrightarrow M = O + x.\vec{i} + y.\vec{j}}$$

- Soit $(\vec{I},\vec{J})$ une base de $\mathbb{R}^2$,
  notons (x_I,y_I) [respt (x_J,y_J)] les composantes de $\vec{I}$ [respt $\vec{J}$] dans la base $(\vec{i},\vec{j})$

$$\boxed{\vec{I} = x_I.\vec{i} + y_I.\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{J} = x_J.\vec{i} + y_J.\vec{j}}$$

- Soit $(O,\vec{I},\vec{J})$ un autre repère: on note (X,Y) les cordonnées dans ce repère.

$$\boxed{M(X,Y) \text{ dans } (O,\vec{I},\vec{J}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = X.\vec{I} + Y.\vec{J} \Longleftrightarrow M = O + X.\vec{I} + Y.\vec{J}}$$

- on a ainsi

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} = X.\vec{I} + Y.\vec{J} = X.(x_I.\vec{i} + y_I.\vec{j}) + Y.(x_J.\vec{i} + y_J.\vec{j})$$

  en identifiant, on trouve donc

$$x = x_I.X + x_J.Y \quad \text{et} \quad y = y_I.X + y_J.Y \quad \text{soit} \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_I & x_J \\ y_I & y_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}$$

- Comme on pouvait s'y attendre, lorsque l'on effectue un changement de repère en gardant la même origine, on retrouve la formule de changement de base pour les vecteurs avec la matrice de passage. Lorsque <u>le changement de base s'effectue d'une bon vers une autre bon, on sait que la matrice de passage est orthogonale</u>: son inverse est donc simplement sa transposée (pratique pour les calculs)
- En particulier, <u>lorsque l'on passe du repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ au repère $(O,\vec{j},\vec{i})$ on intervertira juste les rôles de x et de y dans les equations</u>.

2 Ellipse

définition 1: équation reduite d'une ellipse

On dit que la courbe Γ est une ellipse lorsqu'il existe un repère orthonormé $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$ dans lequel Γ possède comme équation cartésienne $\boxed{\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1}$ avec $a>b>0$.

- les axes (AA') et (BB') sont les axes de symétries de l'ellipse
- Ω est un centre de symétrie de l'ellipse
- le segment $[\Omega A]$ s'appelle le demi-grand axe
- le segment $[\Omega B]$ s'appelle le demi-petit axe
- a est la longueur du demi-grand axe
- b est la longueur du demi-petit axe

une représentation paramétrique possible de cette ellipse est :

$\boxed{\begin{cases} X = & a\cos t \\ Y = & b\sin t \end{cases}}$ *avec* $t\in[-\pi,+\pi]$(*ou* $[0,2\pi]$ *ou* ...)

exemple 1:

On considère Γ la courbe d'équation $9x^2+16y^2=25$ dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que Γ est une ellipse.
   Dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ *l'équation s'écrit encore* $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{5}{4}\right)^2}=1.$
   On reconnait l'équation de l'ellipse ci-contre:
2. Donner l'équation de Γ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ avec $\Omega=(1,-2)$

On considère Γ_1 le courbe d'équation $16x^2+9y^2=25$ dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$.

3. Montrer que Γ_1 est une ellipse!

exemple 2:

On considère l'ellipse Γ de sommets $A(6,-3), B(3,-1), A'(0,-3)$ et $B'(3,-5)$

1. Donner son équation dans la repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ avec $\Omega=(3,-3)$
2. Donner son équation dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$

exemple 3:

On considère la courbe d'équation cartésienne $3x^2+4y^2-12x+8y+4=0$

1. Montrer qu'il s'agit d'une ellipse.
2. Donner les longueurs des demi-axes.
3. Donner une représentation paramétrique de la courbe précédente.

exemple 4: en toute rigueur un cercle n'est pas une ellipse

Montrer que dans un repère orthonormé l'équation cartésienne d'un cercle est toujours de la forme $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma$ avec $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$
En déduire qu'un cercle n'est pas une ellipse!

remarque 1 (***des résultats immédiats par changement de repère***)

1. *Soit* Γ *courbe d'équation cartésienne* $\boxed{\dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{\beta^2}=1}$.

   – *lorsque* $\boxed{\alpha^2=\beta^2}$, Γ *est le cercle de centre* (x_0,y_0) *et de rayon* $|\alpha|$

   – *lorsque* $\boxed{\alpha^2\neq\beta^2}$

   i) si $|\alpha|>|\beta|$, Γ *est une ellipse d'axe principal la droite d'équation* $y=y_0$

   ii) si $|\alpha|<|\beta|$, Γ *est une ellipse d' axe principal la droite d'équation* $x=x_0$

   iii) dans les deux cas, le centre de l'ellipse est le point de coordonnées (x_0,y_0)

2. *la courbe qui possède l'équation cartésienne ci-dessus a la représentation paramétrique suivante:*

   $\begin{cases} x= & x_0+\alpha\cos(t) \\ y= & y_0+\beta\sin(t) \end{cases}$ *avec* $t\in[-\pi,+\pi]$

3 Hyperbole

définition 2: équation réduite d'une hyperbole

On dit que la courbe Γ est une hyperbole lorsqu'il existe un repère orthonormée $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$ dans lequel Γ possède comme équation cartésienne $\boxed{\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1}$ avec $a>0$ et $b>0$.

– les axes (ΩX) et (ΩY) sont les axes de symétries de l'hyperbole

– Ω est le centre de symétrie de l'hyperbole

– les droites d'équation $Y=\dfrac{b}{a}X$ et $Y=\dfrac{-b}{a}X$ sont les droites asymptotes de l'hyperbole.

une représentation paramétrique possible : $\boxed{\begin{cases} X= & \epsilon.a\,\mathrm{ch}\,t \\ Y= & b\,\mathrm{sh}\,t \end{cases}}$ *avec* $t\in\mathbb{R}$ *et* $\epsilon=\pm1$

exemple 5: hyperbole équilatère (HP)

On dit qu'une hyperbole est équilatère lorsque ses asymptotes sont perpendiculaires.

1. Montrer qu'une hyperbole est équilatère ssi $a = b$ dans son équation réduite
2. Montrer que si une hyperbole est équilatère alors il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}(\Omega_1, \vec{I_1}, \vec{J_1})$ dans lequel son équation est du type $X_1.Y_1 = k$ avec k constante réelle non nulle.
   Etablir la réciproque

exemple 6:

Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$ fixé.
Montrer, qu'en général, la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$ dans un repère orthonormé est une hyperbole

exemple 7:

Montrer que la courbe d'équation $x^2 - 4y^2 = -1$ est une hyperbole.
Donner ses asymptotes et son centre de symétrie. La dessiner.

remarque 2 (***des résultats immédiats par changement de repère***)

- *La courbe d'équation* $\boxed{\dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = 1}$ *est une hyperbole*
- *La courbe d'équation* $\boxed{\dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = -1}$ *est une hyperbole*
- *les hyperboles ci-dessus possèdent respectivement les représentations paramétriques suivantes:*
  $\begin{cases} x = & x_0 + \varepsilon\alpha\,\mathrm{ch}(t) \\ y = & y_0 + \beta\,\mathrm{sh}(t) \end{cases}$ *avec* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon = \pm 1$ *et* $\begin{cases} x = & x_0 + \beta\,\mathrm{sh}(t) \\ y = & y_0 + \varepsilon\alpha\,\mathrm{ch}(t) \end{cases}$ *avec* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\epsilon = \pm 1$

4 Parabole

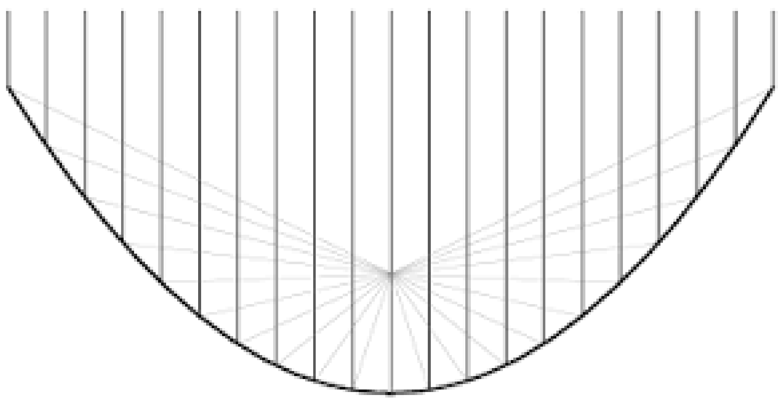
définition 3: équation réduite d'une parabole

On dit que la courbe Γ est <u>une parabole</u> lorsqu'il existe un repère orthonormé $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ dans lequel Γ possède comme équation cartésienne $\boxed{Y^2 = 2pX}$ avec $p > 0$

- la droite (ΩX) est un axe de symétrie de la parabole
- Ω est le sommet de la parabole.
- *une représentation paramétrique possible est alors* $\boxed{\begin{cases} X &= \dfrac{t^2}{2p} \\ Y &= t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$

théorème 1:

Une courbe Γ est une parabole lorsqu'il existe un repère orthonormé dans lequel une des coordonnées est une fonction du second degré de l'autre.

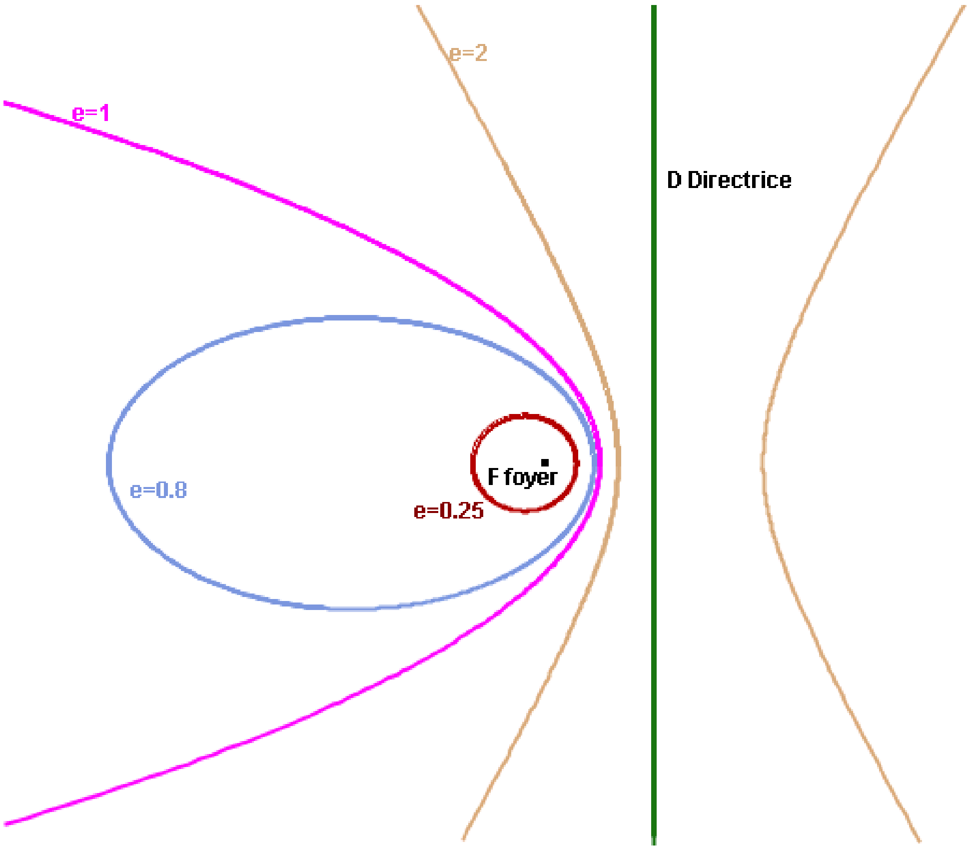


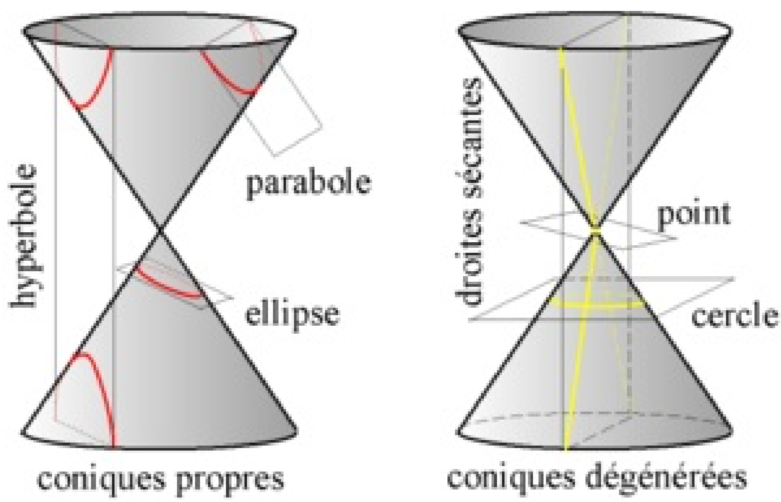
5 Réduction des coniques

définition 4: définition géométrique des coniques (HP)

Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à D et e un réel strictement positif.
On appelle <u>conique de directrice D, de foyer F et d'excentricité e</u> l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{d(M,F)}{d(M,D)} = e$

avec cette définition géométrique, <u>les seules coniques</u> sont les ellipses, les hyperboles et les paraboles. Et c'est tout!





D'une manière plus générale, on appelle conique, ou courbe du second degré, toute courbe Γ qui possède une équation du type

$$\boxed{ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0}$$

où (a,b,c,d,e,f) sont des constantes réelles avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

La question qui se pose est la question dite de **la réduction de la conique**:
Il s'agit à partir d'une équation du seconde degré de donner la nature de la conique.

Suivant que le terme dit croisé xy est présent ou pas, on procédera de manières différentes

méthode 1: réduction d'une conique sans terme croisé
Lorsque $b=0$ on met les termes en x et en y sous forme canonique: puis on interprète, grâce aux équations réduites de référence, le résultat trouvé.

Les différents cas possibles sont les suivants(ils ne sont pas à mémoriser)

- si a et c sont non nuls :
  $ax^2+cy^2+2dx+2ey+f=0 \Leftrightarrow a(x+\dfrac{d}{a})^2+c(y+\dfrac{e}{c})^2=\dfrac{d^2}{a}+\dfrac{e^2}{c}-f=K$
  - si $K=0$ et $ac>0$ alors Γ est un point: $(-\dfrac{d}{a},-\dfrac{e}{c})$
  - si $K=0$ et $ac<0$ alors Γ l'union de 2 droites : $\sqrt{|\dfrac{a}{c}|}(x+\dfrac{d}{a})\pm(y+\dfrac{e}{c})=0$
  - si $K\neq0$, $\dfrac{a}{K}<0$ et $\dfrac{c}{K}<0$ alors $\Gamma=\emptyset$
  - si $K\neq0$, $\dfrac{a}{K}>0$ et $\dfrac{c}{K}>0$ alors Γ est une ellipse qui est en fait un cercle si $a=c$
  - si $K\neq0$, $ac<0$ alors Γ est une hyperbole
- si $a=0$ et $c\neq0$:
  $cy^2+2dx+2ey+f=0 \Leftrightarrow c(y+\dfrac{e}{c})^2=-2dx+\dfrac{e^2}{c}-f=-2dx+L$
  - si $d=0$ et $\dfrac{L}{c}<0$ alors $\Gamma=\emptyset$
  - si $d=0$ et $\dfrac{L}{c}\leq0$ alors Γ est l'union de 2 droites horizontales
  - si $d\neq0$ alors Γ est une parabole
- le cas $a\neq0$ et $c=0$ est similaire au cas $a=0$ et $c\neq0$

exemple 8: λ est un paramètre réel

Déterminer la nature de la courbe $\Gamma_\lambda:(\lambda+1)x^2+(\lambda+1)x+\lambda^2y^2+y+\dfrac{1}{4}=0$

exemple 9:

1. Déterminer la nature et les éléments de la courbe Γ_m d'équation $9x^2+my^2-18x+16y-11=0$ avec $m\in\mathbb{R}$
2. Même question avec $\Gamma_m : mx^2+4mx+(m-1)y^2+2=0$

Pour chacune de ces deux équations, on pourra s'intéresser également aux nombre de courbes Γ_m qui passe(nt) par un point (x,y) fixé.

méthode 2: réduction d'une conique avec terme croisé
Voir le polycopié dédié !