Compléments: trace,
Hyperplans & Formes linéaires

Table des matières

1 Hyperplans et formes linéaires **1**

2 Trace d'une matrice carrée **6**

1 Hyperplans et formes linéaires

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$.

théorème 1: $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces vectoriels également!

1. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}-$ev de dimension un
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}-$ev de dimension un mais un $\mathbb{R}-$ev de dimension 2

En effet:

i) $\mathbb{R} = \{a.1 | a \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(1)$ et $\mathbb{C} = \{z.1 | z \in \mathbb{C}\} = \text{vect}(1)$

ii) $\mathbb{C} = \{a.1 + b.i | (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(1,i)$ avec $(1,i)$ famille libre pour un $\mathbb{R}-$ev.

définition 1: formes linéaires

On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans le corps de base $\mathbb{K}$.
L'ensemble image d'une forme linéaire est ainsi inclus dans $\mathbb{K}$, c'est donc soit $\{0\}$ soit $\mathbb{K}$

exemple 1:

1. l'application $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b,c) & \longmapsto & 2a+b-3c \end{array}}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$
2. l'application $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(1) \end{array}}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$
3. l'application $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & P & \longmapsto & (P(1),P'(1)) \end{array}}$ n'est pas une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$

remarque 1

- *$\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des formes linéaires sur E*
  (Hors-programme: on l'appelle le dual de E, et on le note E^* (no comment!))
- *$\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ et $\dim E$ sont deux espaces vectoriels de même dimension, car*

$$\dim \mathcal{L}(E,\mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = \dim E \times 1 = \dim E$$

théorème 2:

Soit f une forme linéaire sur E.

Si f est l'application nulle **alors** $\ker f = E$ **sinon** $\begin{cases} f \text{ est surjective, càd } f(E) = \mathbb{K} \\ \dim \ker f = \dim E - 1 \end{cases}$

définition 2:

Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
On dit que F est un hyperplan de E lorsque F est un sev admettant une droite comme supplémentaire (càd lorsque $\dim F = \dim E - 1$)
exemple:
Dans $E = \mathbb{R}^2$, les hyperplans sont les droites vectorielles.
Dans $E = \mathbb{R}^3$, les hyperplans sont les plans vectoriels

théorème 3: un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle

Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

i.) F est un hyperplan de E

ii.) $\exists \vec{a} \in E \setminus \{\vec{0}\}, E = F \oplus \text{vect}(\vec{a})$

iii.) il existe une forme linéaire f sur E, différente de l'application nulle, telle que $F = \ker f$

iv.) F possède, dans toute base $\mathcal{B}$ de E, une équation du type $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ où $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ est un n-uplet non nul d'éléments de $\mathbb{K}$ fixés,

exemple 2:

On retrouve le fait que:

- Dans $E = \mathbb{R}^2$, les droites vectorielles sont les hyperplans:
  elles possèdent une éq. du type $ax + by = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$,
  et ainsi $\boxed{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by = 0\}}$,

  En introduisant l'application $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & ax + by \end{array}}$

  on remarque que $D = \ker f$ (c'est bien le noyau d'une forme linéaire non nulle)

- Dans $E = \mathbb{R}^3$, les plans sont les hyperplans:
  l'équation $ax + by + cz = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ est l'éq. d'un plan vectoriel.
  En introduisant l'application $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & ax + by \end{array}}$

  on remarque que le plan d'é. $ax + vy + cz = 0$ correspond au $\ker f$

exemple 3:
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.
Notons $H = \{P \in E, \mid P(0) = P'(2)\}$

Considérons $(X^2,X,1)$ comme base de E.
Notons (x_1,x_2,x_3) les coordonnées dans cette base.
On a l'équivalence

$$x_1.X^2 + x_2.X + x_3.1 \in H \iff x_3 = 4x_1 + x_2 \iff 4x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

On vient de prouver que, dans la base $(X^2,X,1)$, H est caractériser par l'équation $4x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
On peut en déduire que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^2[X]$

Une autre manière de justifier que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$ serait de considérer l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(0) - P'(2) \end{array}}$ et de montrer que cette application est linéaire.
Ceci prouverait que f est une forme linéaire (autre que l'application nulle), et donc que son noyau est un hyperplan!

exemple 4:
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) |\, \mathrm{tr}(M) = 0\}$ est un sev de E
2. Donner la dimension de F ainsi qu'un supplémentaire de F dans E
3. Donner une base de F

théorème 4: sev vu comme l'intersection d'hyperplans
Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. L'intersection de p hyperplans est un sev de dimension supérieure ou égale à $n - p$.
2. Soit un entier p tel que $0 \leq p \leq n$ et F un sev de E de dimension $n - p$.
   Alors il possible de trouver p hyperplans tels que F soit l'intersection de ces hyperplans.
   tout sev de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans bien choisis

rem: on peut interpréter les hyperplans comme des contraintes: si elles sont indépendantes, elles abaissent chacune la dimension d'une unité ...

exemple 5:
Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère les 2 sev suivants

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(1) = 0\} \qquad G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(1) = P(-1) = 0\}$$

1. Justifier que F est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Justifier que G est l'intersection de deux hyperplans. Qu'en déduit-on sur sa dimension?
3. Quelle est la dimension de $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$?

exemple 6:

Considérons le système $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 4x_4 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_5 & = 0 \\ x_1 - 4x_4 + x_5 & = 0 \end{cases}$

1. Le cours sur les systèmes linéaires nous dit que l'ensemble des solutions de ce système est un espace vectoriel de dimension $p - r$ (nombre d'inconnues moins le rang du système)
2. Le système peut aussi s'interprèter comme l'intersection de 3 hyperplans de $\mathbb{R}^5$. L'ensemble des solutions est donc, d'après le théorème précédent, un sev de dimension au moins
Il sera un espace de dimension exactement deux ssi les trois équations sont linéairement indépendantes.

exemple 7: droite vue comme l'intersection d'hyperplans

On se placera successivement dans $E = \mathbb{R}^3$ et $E = \mathbb{R}^4$ muni de leurs bases canoniques.
On considère la droite vectorielle $D = \text{vect}(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$

- dans $E = \mathbb{R}^3$.
D peut être définie comme l'intersection de <u>2 hyperplans</u>:
$$\text{celui d'éq. } x_1 - x_2 = 0 \text{ et celui d'éq. } 2x_1 + x_3 = 0$$
En effet, on a
$$(x_1,x_2,x_3) \in H_1 \cap H_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 & = 0 \\ 2x_1 + x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 & = x_1 \\ x_3 & = -2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3) = x_1(1,1,-2) \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3) \in D$$
- dans $E = \mathbb{R}^4$.
D peut être définie comme l'intersection de <u>3 hyperplans</u>:
$$\text{celui d'éq. } x_1 - x_2 = 0, \text{ celui d'éq. } 2x_1 + x_3 = 0 \text{ et celui d'éq. } x_4 = 0$$
En effet, on a
$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in H_1 \cap H_2 \cap H_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 & = 0 \\ 2x_1 + x_3 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 & = x_1 \\ x_3 & = -2x_1 \\ x_4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1(1,1,-2,0)$$
$$\Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4) \in D$$

exemple 8:

Soit E un ev de dimension finie, H un hyperplan de E et F un sev de E de dimension p.
Montrer que $F \cap H$ est un sev de dimension $p - 1$ ou p

démonstration 1 (***démonstration du théorème 4***)

1. *Soient* $H_1,\dots,H_p$ $\quad p$ *hyperplans de* E *avec* $\dim E = n$
On sait d'après un théorème précédent que chacun de ses hyperplans peut être vu comme le noyau d'une forme linéaire non nulle.
Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ *il existe une forme linéaire* f_i *autre que l'application nulle telle que* $H_i = \ker f_i$
Considérons alors $\boxed{\begin{array}{rcl}\varphi : E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ \vec{x} & \longmapsto & (f_1(\vec{x}),\dots,f_p(\vec{x}))\end{array}}$
   - *il est clair que* $\ker\varphi = \bigcap\limits_{i=1}^{p} \ker f_i = \bigcap\limits_{i=1}^{p} H_i$
   - *on a aussi* $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{K}^p$ *et donc* $\operatorname{rg}(\varphi) \leqslant p$
   - *le théorème du rang appliqué à* φ *donne* $\dim\ker\varphi = \dim E - \operatorname{rg}\varphi \geqslant n-p$

   On a bien prouvé que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p) \geqslant n-p$
2. *Soit* F *un sev de dimension* $n-p$
Considérons G *un supplémentaire de* F *dans* E*: on a donc* $E = F \oplus G$
Considérons maintenant une base adaptée à cette décomposition: soit $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-p})$ *une base de* F*, et* $(\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_p)$ *une base de* G*. La concaténation de ces deux bases donnent une base de* E*.*
Considérons maintenant p *hyperplans engendrés à chaque fois par* $n-1$ *vecteurs de la base ci-dessus, plus précisément*
   - H_1 *l'hyperplan engendré par* $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-p},\vec{\varepsilon}_2,\dots,\vec{\varepsilon}_p)$ *(tous sauf* $\vec{\varepsilon}_1$*)*
   - H_2 *l'hyperplan engendré par* $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-p},\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_3\dots,\vec{\varepsilon}_p)$ *(tous sauf* $\vec{\varepsilon}_2$*)*
   - ...
   - H_p *l'hyperplan engendré par* $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-p},\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_{p-1})$ *(tous sauf* $\vec{\varepsilon}_p$*)*

   Notons $(x_1,\dots,x_n)$ *les coordonnées dans la base* $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-p},\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_p)$*.*
On a alors:
   - $H_1 = \{x_1\vec{e}_1 + \dots + x_{n-p}\vec{e}_{n-p} + x_{n-p+2}\vec{\varepsilon}_2 + \dots x_n\vec{\varepsilon}_p | (x_1,\dots,x_n,x_{n-p+2},\dots,x_n) \in \mathbb{K}^{n-1}\}$ *est l'hyperplan d'éq.* $x_{n-p+1} = 0$
   - H_2 *est l'hyperplan d'éq.*$x_{n-p+2} = 0$
   - ...
   - $H_p = \{x_1\vec{e}_1 + \dots + x_{n-p}\vec{e}_{n-p} + x_{n-p+1}\vec{\varepsilon}_1 + \dots x_{n-1}\vec{\varepsilon}_p | (x_1,\dots,x_n,x_{n-p+1},\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}\}$ *est l'hyperplan d'éq.* $x_n = 0$

   Considérons un vecteur $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n-p} x_i\vec{e}_i + \sum\limits_{i=1}^{p} x_{n-p+i}\vec{\varepsilon}_i$ *quelconque de* E
On a alors les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned}\vec{x} \in F &\Longleftrightarrow x \in \operatorname{vect}(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-p}) \\ &\Longleftrightarrow x_{n-p+1} = x_{n-p+2} = \dots = x_n = 0 \\ &\Longleftrightarrow \vec{x} \in H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p\end{aligned}$$

   Ce qui prouve que $F = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p$

2 Trace d'une matrice carrée

définition 3: trace d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n , on appelle trace de A et on note $tr(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A. On a donc $\boxed{tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$

Quelle que soit la valeur de n, la somme des coefficients diagonaux d'une matrice carrée A est toujours notée $\mathrm{tr}(A)$

exemple 9:

Quelle est la trace d'une matrice antisymétrique?

théorème 5: propriétés de l'application trace

i) l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & tr(A) \end{array}}$ est une forme linéaire(càd une appli. lin. à valeurs dans $\mathbb{K}$)

ii) pour A et B matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\boxed{tr(AB) = tr(BA)}$

iii) deux matrices semblables possèdent la même trace.

Attention! Contrairement à la formule valable pour les déterminants, on n'a pas $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A).\mathrm{tr}(B)$

exemple 10: noyau de l'application trace

On considère $\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}}$. Déterminer le noyau de l'application tr

1. dans le cas où $n = 2$
2. dans le cas où $n = 3$
3. dans le cas général

exemple 11: classique

Peut-on trouver deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?

définition 4: trace d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension n et u un endomorphisme de E.
On appelle trace de l'endomorphisme u, et on note $\mathrm{tr}(u)$, la trace de n'importe quelle matrice associée à u

cette défintion est légitimée par le fait que deux matrices semblables ont la même trace!

exemple 12:

Déterminer la trace de l'endomorphisme $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y,x-y) \end{array}$

exemple 13:

Déterminer la trace de l'endomorphisme $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .M \end{array}}$

exemple 14:

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ de trace nulle.
Montrer que f^2 est une homothétie.

exemple 15:

Soit E est ev de dimension 1789 et u un projecteur de E de trace $\operatorname{tr}(u) = 1515$.
Donner $\operatorname{rg}(u)$, $\dim(\ker u)$ et $\dim(\ker(u - id_E))$

méthode 1: comment déterminer la trace d'un endomorphisme

On écrit une matrice associée à l'endomorphisme et on calcule la somme des coefficients diagonaux.
exemple:
Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(X+t)dt \end{array}}$

- On choisit d'écrire la matrice de u dans la base $(1,X,X^2)$
- Le calcul donne $f(1) = 1$, $f(X) = X + \dfrac{1}{2}$ et $f(X^2) = X^2 + X + \dfrac{1}{3}$.
- On a ainsi $\boxed{\operatorname{Mat}_{(1,X,X^2)} u = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\operatorname{tr}(u) = 1 + 1 + 1 = 3}$

exemple 16: Des traces classiques. (on note $n = \dim E$)

Déterminer la trace de l'endomorphisme u lorsque:

1. u est l'homothétie de rapport k.
2. u est la projection sur F_1 parallèlement à F_2
3. u est la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2

théorème 6: traduction du théorème 5

Soient u et v deux endomorphismes de E.
On a $\boxed{\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)}$
rem: on a bien sûr aussi $\operatorname{tr}(\lambda.u + v) = \lambda. \operatorname{tr}(u) + \operatorname{tr}(v)$