SN 1 (bornée à partir d'un certain rang. . .)
Soit une suite réelle (u_n) pour laquelle on sait que $\exists\varepsilon > 0, \forall n \geqslant 6, |u_n - 4| \leqslant \varepsilon$

i) Peut-on dire que la suite (u_n) est convergente?

ii) Peut-on dire que la suite (u_n) est bornée? Si oui, donner un majorant et un minorant.

SN 2
Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$.
Montrer que si (u_n) possède une limite autre que 1 alors $\ln u_n \sim \ln v_n$

SN 3
Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$.

1. Montrer qu'en général on n'a pas $e^{u_n} \sim e^{v_n}$
2. Montrer que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ ssi $\lim u_n - v_n = 0$

SN 4
Rappeler la définition de $\lim u_n = +\infty$
Soit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall B \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant B$.
A-t-on $\lim u_n = +\infty$?

SN 5 (Très important! A savoir redémontrer)
Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ Il y a équivalence entre :

i) la suite u tend vers l

ii) les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers l

SN 6
Soit $u = (u_n)$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{\infty} u_{2n} = l \in \mathbb{R}$.

1. La suite (u_n) est-elle forcément convergente? Justifier.
2. On suppose de plus que (u_n) est croissante.
   Montrer que $\lim u_n = l$

SN 7
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle telle que $\forall n \geqslant 1, \forall p \geqslant 1, 0 \leqslant u_{n+p} \leqslant \dfrac{n+p}{np}$
Etudier la convergence de la suite (u_n)

SN 8 (à savoir redémontrer)
"Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif."
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite telle que $\lim u_n = l > 0$.
Montrer qu'il existe $k > 0$ et $n_0 \geqslant 0$ tels que $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant k$

SN 9
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui converge vers 4.

1. Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n \leqslant 4.3$
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel on a $4 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant 4 + \dfrac{\varepsilon}{2}$

SN 10
Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

SN 11 (Toute suite d'entiers convergente est stationnaire, à savoir refaire)
Soit $(k_n)_{n\geqslant 0}$ une suite **d'entiers**. On suppose qu'elle converge vers la limite k.
Nous allons montrer que la suite (k_n) est nécessairement une suite stationnaire.

1. Rappeler la définition avec les quantificateurs de $\lim k_n = k$
2. Montrer que $\forall\epsilon > 0, \exists N_1, \forall n \geqslant N_1, \forall m \geqslant N_1, |k_n - k_m| \leqslant 2\epsilon$
3. En choisissant judicieusement une valeur de ϵ, montrer que $\forall n \geqslant N_1, k_n = k_{N_1}$
4. Conclure

SN 12
On souhaite montrer que $1! + 2! + 3! + \cdots + (n-1)! + n! \underset{\infty}{\sim} n! \qquad (*)$

1. Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$ fixé, donner un équivalent de $\dfrac{k!}{n!}$ quand $n \to \infty$.
   Peut-on en déduire alors facilement $(*)$?
2. Après avoir remarqué que pour tout $n \geqslant 3$ on a
   $$\frac{1! + 2! + 3! + \cdots + (n-1)! + n!}{n!} = \frac{1! + \cdots + (n-2)!}{n!} + \frac{1}{n} + 1$$
   justifier $(*)$.

SN 13
Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3-2i)u_{n+1} - (5-5i)u_n$$

SN 14
on devra trouver des expressions simples! Soit $\theta \in]0,\pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2\cos\theta . u_{n+1} + u_n = 0$$

SN 15
Soit a un réel différent de deux.
On s'intéresse à la suite (u_n) définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1, qui vérifie la relation de récurrence $\forall n \geqslant 0, u_{n+2} = (2+a)u_{n+1} - 2au_n$.

1. Déterminer l'expression explicite de u_n en fonction de n, a, u_0 et u_1
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

SN 16
On souhaite déterminer les suites à valeurs complexes qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n + (-1)^n \quad (1)$$

1. Déterminer une suite (x_n) qui vérifie la condition (1).
   (on pourra chercher x_n sous la forme $\lambda.(-1)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$)
2. On définit la suite (v_n) par $\forall n \geqslant 0, v_n = u_n - x_n$.
   Montrer l'équivalence entre les propositions
   i) (u_n) vérifie la condition (1)
   ii) (v_n) vérifie la condition (2) $\forall n \geqslant 2v_{n+2} - 3v_{n+1} + v_n = 0$
3. En déduire toutes les suites qui vérifient la condition (1)

SN 17 (théorème de Césaro - classique- A savoir refaire)
Soit (u_n) une suite complexe ou réelle qui converge vers une limite finie l. On pose $x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Nous allons montrer que la suite (x_n) converge elle aussi vers l.
(On retiendra que si une suite converge vers l alors la suite de ses moyennes arithmétiques converge également vers l)

1. On suppose que $l = 0$.
   (a) On se fixe un $\epsilon > 0$. Justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $k \geqslant n_0, |u_k| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}$.
   (b) Justifier qu'alors pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}$
   (c) Justifier l'existence d'un entier n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $\left|\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}$
   (d) En déduire l'existence d'un entier n_2 (que l'on précisera en fonction de n_0 et de n_1) tel que $\forall n \geqslant n_2, |x_n| \leqslant \epsilon$
   (e) conclure
2. Dans le cas où $l \neq 0$, démontrer le résultat voulu en considérant la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - l$

SN 18
1. Vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ possède, dans l'intervalle $]0,1]$, une et une seule solution, que l'on notera u_n.
2. Etudier la monotonie de la suite de terme général u_n, puis justifier que $\lim u_n = 0$
3. Donner un équivalent *simple* de u_n, quand n tend vers l'infini, ainsi que de $v_n = e^n u_n - 1$.

SN 19
Soit $P_n(X) = X^n + X^{n-1} + \cdots + X - 1$ pour $n \geqslant 1$
1. Montrer qu'il existe une unique racine, notée a_n, de P_n sur $]0, +\infty[$
2. En considérant par exemple $P_n(a_{n-1})$, montrer que la suite (a_n) est décroissante
3. Montrer que la suite (a_n) converge.
4. Justifier que pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_n^{n+1} - 2a_n + 1 = 0$ puis déterminer $\lim a_n$.

SN 20
Dans cet exercice nous allons montrer que l'ensemble des entiers n tels que $2^{n^2} < (4n)!$ est fini.
1. On pose $u_n = \dfrac{(4n)!}{2^{n^2}}$. Montrer que $\sum u_n$ est une série convergente.
2. En déduire que pour n assez grand $2^{n^2} \geqslant (4n)!$, puis conclure.
3. Retrouver le même résultat en utilisant la formule de Stirling $n! \underset{\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})$

SN 21
On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$ pour $n \geqslant 1$
Déterminer la nature de la série de terme général u_n

SN 22
Soit x un réel tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{x}{2^n} \not\equiv 0[\dfrac{\pi}{2}]$.
Après avoir exprimé $\dfrac{1}{\tan(x)} - \tan x$ de manière simple en fonction de $\tan(2x)$,
justifier que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{x}{2^n}$ converge et donner sa somme

SN 23
Pour $n \geqslant 2$ on pose $u_n = \dfrac{\ln n}{2^n}$ et $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$
1. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes
2. Montrer que $\sum_{n=2}^{\infty} v_n = -\dfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} u_n$

SN 24
1. préliminaire : Montrer que si la série de terme général $x_n > 0$ converge alors la série de terme général x_n^2 converge aussi
2. Dans les questions suivantes, on considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\operatorname{ch} u_n} & \forall n \geqslant 0 \end{cases}$
   Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3. On pose pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative
   (b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle
   (c) En utilisant $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$, montrer que la série de terme général v_n est divergente
4. (a) Montrer que $v_n \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$
   (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente
   (c) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n

SN 25
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe telle que $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall n \geqslant 0, \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$
1. Montrer que la suite (u_n) est majorée par une suite géométrique que l'on explicitera.
2. A quelle condition sur k est-t-on sûr que la suite (u_n) CV? Que la série de terme général u_n CV?
3. Dans le cas où $k < 1$, déterminer en fonction de k et de u_0 le plus petit entier N pour lequel on est sûr que $|u_N| \leqslant 10^{-5}$

SN 26
On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x$ ainsi que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n) \quad \text{et } v_{n+1} = f(v_n) \qquad \text{avec } v_0 \in \mathbb{R} \text{ fixé}$$

1. Etudier la suite (u_n)
2. Etude de la suite (v_n)
   (a) Etudier le signe de la $f(x) - x$
   (b) Tracer le tableau de variation de la fonction f
   (c) Déterminer des intervalles stables par f, càd des intervalles I tels que $f(I) \subset I$
   (d) Montrer que si I est un intervalle stable et si $v_0 \in I$ alors tous les termes de la suite (v_n) sont dans I
   (e) Donner la monotonie de la suite (v_n). *(on pourra discuter suivant la valeur de v_0)*
   (f) Montrer que si la suite (v_n) est convergente cela ne peut être que vers $0, 1$ ou 2
   (g) Etudier $\lim v_n$

SN 27
Montrer la convergence et déterminer la somme de $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ avec $n \geqslant 2$

SN 28
Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \ln n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \ln n$

SN 29
Nature et somme des séries suivantes :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$
2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$
3. $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$
4. $\sum_{0}^{\infty} 2^{-n/2}\cos(n\frac{\pi}{4})$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$
6. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$
10. $\sum_{0}^{\infty} \frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$
11. $\sum_{2}^{\infty} \ln(1-\frac{1}{n^2})$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n}$

SN 30
Nature des séries de terme général :

1. $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln n}$
2. $n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$
3. $\frac{2^n.n!}{n^n}$
4. $\operatorname{sh}\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}$
5. $\frac{(-1)^n n+2}{n^3+2n^2+1}$
6. $2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{2}$
7. $\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$
8. $(-1)^n \operatorname{sh}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$
9. $(-1)^n \operatorname{sh}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$
10. $\frac{1}{(\ln n)^n}$
11. $\frac{1.4.7.\dots.(3n-5)(3n-2)}{3^n.n!}$
12. $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$
13. $3\ln(n^2+1) - 2\ln(n^3+1)$
14. $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
15. $\frac{2\times 4\times 6\times\dots\times(2n)}{n^n}$
16. $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
17. $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$
18. $\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

SN 31
a,b et α étant deux paramètres réels, nature des séries de terme général :

1. $\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}$
2. $\cos\frac{1}{n} - a - \frac{b}{n}$
3. $\ln\left(\frac{1+n^a}{2+n^b}\right)$
4. $a^n \sin\frac{1}{n}$
5. $\frac{1+a^n}{n} b^n$
6. $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$
7. $\operatorname{ch}^a n - \operatorname{sh}^a n$
8. $\arctan n^\alpha$
9. $\frac{1}{n\ln(1+a^n)}$
10. $\frac{a^n.2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$
11. $\tan\pi\sqrt{n^2+an+b}$
12. $\arccos\sqrt{1-\frac{1}{n^\alpha}}$

SN 32
Nature (et somme éventuelle) des séries de terme général :

$$u_n = \arctan(\frac{1}{n^2+n+1}) \qquad v_n = \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$$

(on pourra, pour $\sum u_n$ et $\sum v_n$, utiliser la formule d'addition (en la démontrant):
$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan(\frac{a-b}{1+ab})$ *si* $(\arctan(a) - \arctan(b)) \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$*)*

SN 33
On considère la série de terme général $u_n = \frac{5n+2}{n(n+1)(n+2)}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Première solution: montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $S_n = 3 - \frac{6+5n}{(n+1)(n+2)}$ et en déduire que la série converge
2. Seconde solution: à l'aide d'une décomposition en éléments simples et d'un procédé télescopique, montrer que la série converge.

SN 34
Soit (u_n) une suite réelle qui vérifie la relation $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$.
Déterminer les suites (u_n) tel que $\sum u_n$ CV

SN 35
Convergence et éventuellement somme de $i)\ \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{2^{4n-3}}$ $\quad ii)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(n\pi/2)}{2^n}$ $\qquad i)\frac{1}{30} \quad ii)\frac{4}{5}$

SN 36
Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\frac{a}{1+a}\right)^n$ où a est un réel donné autre que -1

SN 37
Soit a un nombre complexe.
Etudier la convergence des séries de terme général $u_n = (a^n)^2$ et $v_n = a^{n^2}$

SN 38
Nature des séries $\sum \frac{1}{n^{3+\sin n}}$, $\sum \frac{1}{n^{\cos n}}$, $\sum \frac{1}{n^2 2^n}$, $\sum \frac{2^n}{n^2}$, $\sum e^{-n^2}$, $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$

SN 39
Déterminer la nature ds séries de terme général $u_n = \arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n!}$

SN 40 (très formateur sur la recherche d'équivalents)

1. Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On pose $u_n = \operatorname{sh}\frac{1}{n^\alpha} - \sin\frac{1}{n^\beta}$
   Déterminer la nature de $\sum u_n$
2. Soit α un réel. Déterminons la nature de la série de terme général $u_n = \arctan(n^\alpha)$.

SN 41
Soit a un réel strictement positif. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(n!)^2.a^n}{(2n)!}$

SN 42
Déterminons la nature des séries suivantes $\sum \frac{n!}{n^n}$ et $\sum \frac{x^n}{n!}$ où x est un réel strictement positif donné.
(autant que possible, on essaiera de ne pas utiliser la formule de Stirling, qu'il est intéressant de connaitre, mais qui est hors-programme : $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n\sqrt{2\pi n}e^{-n}$)

SN 43
Nature des séries $\sum \frac{1}{(\ln n)^{2022}}$, $\sum \frac{(\ln n)^{2022}}{n^{1,000000001}}$, $\sum \frac{(\ln n)^{2023}}{n}$, $\sum e^{-n^2}$ et de $\sum e^{-\sqrt{n}}$

SN 44
Convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$