Projecteurs & Symétries vectorielles

Serge Lemarquis

Table des matières

1 Homothéties

définition 1:

Soit $k \in \mathbb{K}$. On appelle homothétie de rapport k l'application linéaire $k.id_E$.
On la note souvent h_k

proposition 1 (*les vérifications sont triviales*)

L'ensemble des homothéties est :

i. stable par la loi de composition

ii. stable par addition et multiplication externe par un scalaire

démonstration 1

Soient k_1 et k_2 deux scalaires.

- $(k_1.id_E) \circ (k_2.id_E) = (k_1.k_2).id_E$
- $k_1.id_E + k_2.id_E = (k_1 + k_2).id_E$
- $k_1.(k_2.id_E) = (k_1.k_2).id_E$

théorème 1: Seules les homothèties ont cette propriété!

Dans toute base B de E, la matrice de l'homothétie $k.id_E$ est $\mathrm{Mat}_B(k.id_E) = k.I_n = \begin{pmatrix} k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & k \end{pmatrix}$

rem: on montrera également en exercice que les seuls endomorphismes de E qui commutent avec tout endomorphisme de E sont les homothéties.

2 Projections associées à une somme directe de 2 sev

exemple 1: dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Soit $E = \mathbb{R}^2$.

- **Notons** $F_1 = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$ **et** $F_2 = \{(0,y)|y \in \mathbb{R}\}$**.**
  On sait que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^2$ et que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) = \underbrace{(x,0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0,y)}_{\in F_2}$$

On a donc $\boxed{\begin{array}{llcl} p_{F_1}: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{llcl} p_{F_2}: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & (0,y) \end{array}}$

- **Notons cette fois** $F_1 = \text{vect}((1,-1))$ **et** $F_2 = \text{vect}((1,0))$**.**
  On a $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^2$, et donc tout élèment de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.
  On a précisément la décomposition

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) = \underbrace{(-y,y)}_{\in F_1} + \underbrace{(x+y,0)}_{\in F_2}$$

On a donc $\boxed{\begin{array}{llcl} p_{F_1}: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & (-y,y) \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{llcl} p_{F_2}: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,0) \end{array}}$

Soit $E = \mathbb{R}^3$

- **Notons** $F_1 = \{(x,y,0)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ **et** $F_2 = \{(0,0,z)|z \in \mathbb{R}\}$**.**
  On sait que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$ et que

$$\forall (x,y,z) \in E, (x,y,z) = \underbrace{(x,y,0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0,0,z)}_{\in F_2}$$

On a donc $\boxed{\begin{array}{llcl} p_{F_1}: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,0) \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{llcl} p_{F_2}: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (0,0,z) \end{array}}$

définition 2: projection

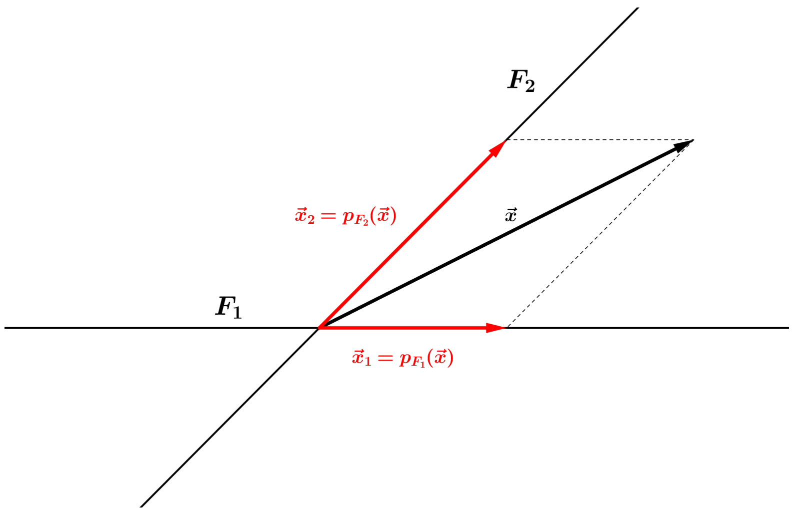
Soit $E = F_1 \oplus F_2$ (ainsi $\forall \vec{x} \in E\,, \exists!(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in F_1 \times F_2\,, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$)
La projection vectorielle sur F_1 parallèlement à F_2 est l'endomorphisme de E, noté p_{F_1}, défini par

$$\boxed{\begin{array}{llcl} p_{F_1}: & E & \longrightarrow & E \\ & \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & p_{F_1}(\vec{x}) = \vec{x}_1 \end{array}}$$

"$p_{F_1}(\vec{x})$ est l'unique vecteur de F_1 tel que $\vec{x} - p_{F_1}(\vec{x}) \in F_2$"

l'endomorphisme $id_E - p_{F_1}$ n'est rien autre que la projection sur F_2 parallèlement à F_1 : il se note p_{F_2} et s'appelle le projecteur associé à p_{F_1}

p_{F_1} est l'application qui à tout vecteur associe sa composante sur F_1 lorsque l'on considère la dècomposition $F_1 \oplus F_2 = E$



définition 3: projecteur

Soit f un endomorphisme de E.
On dit que f est un projecteur de E lorsque $f \circ f = f$

théorème 2: noyau et image d'une projection

Soit p_{F_1} la projection sur F_1 parallèlement à F_2 (notations de la définition 2), on a :

i.) $\ker p_{F_1} = F_2$ *("le noyau est l'espace parallèlement auquel on projette")*

ii.) $\operatorname{Im} p_{F_1} = F_1 = \ker(p_{F_1} - id_E)$ *("l'ensemble image est l'espace sur lequel on projette, c' est aussi l'ensemble des vecteurs invariants par* p_{F_1} *")*

iii.) p_{F_1} est un projecteur

théorème 3: un projecteur est une projection

Soit f un projecteur de E.(càd f est un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = f$)
On a alors :

i) $\operatorname{Im} f \oplus \ker f = E$

ii) $\operatorname{Im} f = \ker(f - id)$

iii) f est la projection sur $\operatorname{Im} f = \ker(f - id) = E_1(f)$ parallèlement à $\ker f = E_0(f)$

remarque 1

Bref, projecteur et projection c'est la même chose; et on projette sur l'image parallèlement au noyau

remarque 2 (*éléments propres d'un projecteur(lien avec la rèduction)*)

- *les valeurs propres d'un projecteur sont* 0 *et* 1
- $E_0(p_{F_1}) = \ker(p_{F_1})$ *est l'espace parallèlement auquel on projette*
- $E_1(p_{F_1}) = \operatorname{Im}(p_{F_1}) = \ker(p_{F_1} - id_E)$ *est l'espace sur lequel on projette*
- *Si E est de dimension finie, un projecteur de E est toujours diagonalisable*

théorème 4: caractérisation matricielle d'un projecteur

Soit f un endomorphisme de E, avec $\dim E = n < \infty$. Il y a équivalence entre :

i.) f est un projecteur

ii.) il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = diag(\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{0,\dots,0}_{n-r})$$

et dans ce cas, on a alors $\boxed{\mathrm{tr}\, f = \mathrm{rg}\, f = r}$

A retenir: un endomorphisme est un projecteur ssi on peut lui associer une matrice diagonale avec des 0 et des 1 sur la diagonale

démonstration 2

Soit E un ev de dimension finie n et f un endomorphisme de E.

- *Montrons que $i) \Rightarrow ii)$*
  On suppose que f est un projecteur.
  On sait alors que $\mathrm{Im}\, f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E, et que f est la projection sur $\mathrm{Im}\, f$ parallèlement à $\ker f$.
  Considérons une base de E adaptée à la décomposition $\mathrm{Im}\, f \oplus \ker f$, c'est à dire obtenue par la concaténation d'une base de $\mathrm{Im}\, f$ et d'un base de $\ker f$.
  Comme les vecteur de $\mathrm{Im}\, f$ sont des vecteurs invariants par f, on a bien la matrice de la projection dans cette base qui est $diag(\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{0,\dots,0}_{n-r})$ avec $r = \dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rg}\, f$
- *Montrons que $ii) \Rightarrow i)$*
  On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = diag(\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{0,\dots,0}_{n-r})$

  On a alors

  $$Mat_{\mathcal{B}}(f^2) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^2 = (diag(\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{0,\dots,0}_{n-r}))^2 = diag(\underbrace{1^2,\dots,1^2}_{r},\underbrace{0^2,\dots,0^2}_{n-r}) = diag(\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{0,\dots,0}_{n-r})$$

  On trouve que $Mat_{\mathcal{B}}(f^2) = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, ce qui permet d'affirmer que $f^2 = f$!

remarque 3 (*cas d'un espace euclidien où F_1 et F_2 sont orthogonaux*)

Lorsque F_1 et F_2 sont orthogonaux, on a des formules assez simples pour connaÃ®tre l'expression du projetè orthogonal

- *Si F_1 est une droite vectorielle dirigée par le vecteur e_1.*

$$\forall x \in E, p_{F_1}(x) = \frac{< x,e_1 >}{||e_1||^2}.e_1$$

- *Si F_1 est un plan vectoriel dont (e_1,e_2) est une base orthogonale.*

$$\forall x \in E, p_{F_1}(x) = \frac{< x,e_1 >}{||e_1||^2}.e_1 + \frac{< x,e_2 >}{||e_2||^2}.e_2$$

exemple 2: Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel

Donner l'expression analytique de la projection orthogonale sur la droite F_1 dirigée par le vecteur $(3,4)$

exemple 3:

Soit $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x,x-y+z,x-2y+2z) \end{array}}$

1. Montrer que f est une projection.
2. Déterminer l'ensemble image et le noyau de f. En déduire les éléments géométriques de f.
3. Est-il possible de trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?
4. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. *Il est facile de montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.*
   De plus, on a pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a

   $$f(f(x,y,z)) = f(x,x-y+z,x-2y+2z) = (x,x-(x-y+z)+(x-2y+2z),x-2(x-y+z)+2(x-2y+2z))$$

   ce qui donne après simplifications $f(f(x,y,z)) = (x,x-y+z,x,-2y+2z) = f(x,y,z)$
   On a bien vérifié que f est un projecteur de E
2. - *Le noyau de f est la droite* $\text{vect}((0,1,1))$ *car*

     $$(x,y,z) \in \ker f \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ x-y+z & = 0 \\ x-2y+2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ z & = y \end{cases}$$

   - *L'image de f est le plan* $\text{vect}((1,1,1),(0,1,2))$
     En effet l'image d'une base étant une famille génératrice de l'ensemble image, on a ici

     $$\text{Im}\, f = \text{vect}(f(1,0,0),f(0,1,0),f(0,0,1)) = \text{vect}((1,1,1),(0,-1,-2),(0,1,2)) = \text{vect}((1,1,1),(0,1,2))$$

   - *On sait d'après théorème que f est la projection sur* $\text{Im}\, f$ *parallèlement à* $\ker f$*; ici f est donc la projection sur le plan* $\text{vect}((1,1,1),(0,1,2))$ *parallèlement à la droite* $\text{vect}((0,1,1))$
3. *Non! Car si f était associée à une telle matrice cela signifierait que son noyau est de dimension deux.*
4. *La concaténation d'une base de* $\text{Im}\, f = \ker(f - id)$ *et d'une base de* $\ker f$ *répond à la question, donc par exemple ici* $((1,1,1),(0,1,2),(0,1,1))$

   remarque:
   notons P la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base,
   on a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,
   notons A la matrice de f dans la base canonique, on a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   et notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   D'après la formule de changement de bases pour les endomorphismes,
   on peut affirmer que $A = P.D.P^{-1}$

3 Symétries vectorielles

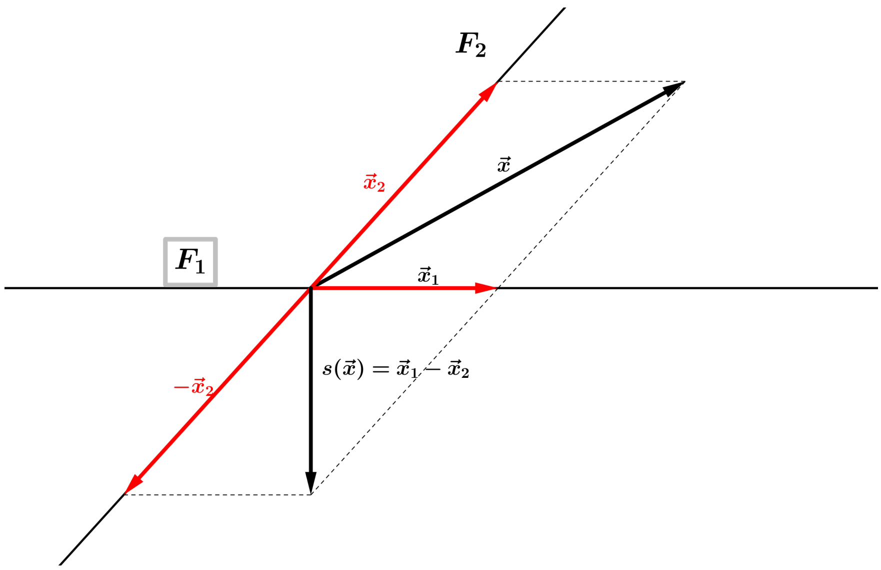
définition 4: automorphisme involutif

Soit f un endomorphisme de E.
On dit que f est un automorphisme involutif de E lorsque $f \circ f = id_E$
un automorphisme involutif est donc un automorphisme de E (endomorphisme bijectif) qui est égal à son propre inverse.

définition 5: symétrie vectorielle

Soit $E = F_1 \oplus F_2$ (ainsi $\forall \vec{x} \in E\,, \exists! (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in F_1 \times F_2\,, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$)
La symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2 est l'endomorphisme de E, noté s, défini par

$$\boxed{\begin{array}{rccl} s: & E & \longrightarrow & E \\ & \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \end{array}}$$



théorème 5: propriétés d'une symétrie vectorielle

Soit s la symétrie vectorielle par rapport à F_1 parallèlement à F_2(notations de la déf. 5), on a :

i.) $\ker s = \{\vec{0}\}$
ii.) $\operatorname{Im} s = E$
iii.) $s \circ s = id_E$
iv.) F_1 est l'ensemble des vecteurs invariants
(on dit que le vecteur x est invariant lorsque $s(x) = x$)
v.) F_2 est l'ensemble des vecteurs anti-invariants
(on dit que le vecteur x est anti-invariant lorsque $s(x) = -x$)

remarque 4 (***lien entre projection et symétrie***)

On a $\boxed{s = 2.p_{F_1} - id_E}$

en effet, pour tout $x \in E$ on a

$$s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = 2\vec{x}_1 - (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = 2p_{F_1}(\vec{x}) - \vec{x} = (2p_{F_1} - id_E)(x)$$

exemple 4: dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Soit $E=\mathbb{R}^2$.

- **Notons $F_1=\{(x,0)|x\in\mathbb{R}\}$ et $F_2=\{(0,y)|y\in\mathbb{R}\}$.**
  On sait que $F_1\oplus F_2=\mathbb{R}^2$ et que
  $$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (x,y)=\underbrace{(x,0)}_{\in F_1}+\underbrace{(0,y)}_{\in F_2}$$
  la symètrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 est donc $\boxed{\begin{array}{rccl} s: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & (x,-y) \end{array}}$

  la symètrie par rapport à F_2 parallèlement à F_1 est donc $\boxed{\begin{array}{rccl} s: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & (-x,y) \end{array}}$

- **Notons cette fois $F_1=\mathrm{vect}((1,-1))$ et $F_2=\mathrm{vect}((1,0))$.**
  On a $F_1\oplus F_2=\mathbb{R}^2$

  On a précisément la décomposition
  $$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, (x,y)=\underbrace{(-y,y)}_{\in F_1}+\underbrace{(x+y,0)}_{\in F_2}$$
  la symètrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 est donc $\boxed{\begin{array}{rccl} s: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & (\end{array}}$

  la symètrie par rapport à F_2 parallèlement à F_1 est donc $\boxed{\begin{array}{rccl} s: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & (\end{array}}$

Soit $E=\mathbb{R}^3$

- **Notons $F_1=\{(x,y,0)|(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ et $F_2=\{(0,0,z)|z\in\mathbb{R}\}$.**
  On sait que $F_1\oplus F_2=\mathbb{R}^3$ et que
  $$\forall (x,y,z)\in E, (x,y,z)=\underbrace{(x,y,0)}_{\in F_1}+\underbrace{(0,0,z)}_{\in F_2}$$
  la symètrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 est donc $\boxed{\begin{array}{rccl} s: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,-z) \end{array}}$

  la symètrie par rapport à F_2 parallèlement à F_1 est donc $\boxed{\begin{array}{rccl} s: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (-x,-y,z) \end{array}}$

remarque 5 (*cas des symètries orthogonales dans un espace euclidien*)

Lorsque F_1 et F_2 sont orthogonaux, on parle de symètrie orthogonale par rapport à F_1 .
Il existe alors des formules assez simples pour ècrire l'expression analytique du symètrique orthogonal.

A faire!

théorème 6: un automorphisme involutif est une symétrie vectorielle

Soit f est un automorphisme involutif de E.(càd f est un endomorphisme de E tel que $f \circ f = id_E$)
On a alors:

i) $\ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E) = E$

ii) f est <u>la</u> symétrie vectorielle par rapport à $\ker(f - id_E) = E_1(f)$
parallèlement à $\ker(f + id_E) = E_{-1}(f)$
L'espace des vecteurs invariants et l'espace des vecteurs anti-invariants sont supplèmentaires dans E

remarque 6

Bref, on a montré que automorphisme involutif et symétrie vectorielle, c'est la même chose...

remarque 7 (*éléments propres d'une symétrie vectorielle s, (lien avec la rèduction)*)

- *les valeurs propres d'une symétrie sont -1 et 1*
- *$E_1(s)$ est l'espace par rapport auquel on effectue la symétrie*
- *$E_{-1}(s)$ est l'espace parallèlement auquel on effectue la symétrie*
- *Si E est de dimension finie, une symétrie est toujours diagonalisable*

théorème 7: caractérisation matricielle d'une symétrie vectorielle

Soit f un endomorphisme de E, avec $\dim E = n < \infty$. Il y a équivalence entre :

i.) f est une symétrie vectorielle

ii.) il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = diag(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-p})$

et dans ce cas on a alors : $\mathrm{tr}\, f = \dim E_1 - \dim E_{-1}$
un endomorphisme est une symétrie vectorielle ssi on peut lui associer une matrice diagonale avec des 1 et des -1 sur la diagonale

démonstration 3 (***bel exemple de raisonnement par analyse synthèse***)

. *Soit* f *un endomorphisme de* E *tel que* $f^2 = f \circ f = id_E$
Nous noterons plus simplement $E_1 = \ker(f - id_E) = \{\vec{x} \in E | f(\vec{x}) = \vec{x}\}$ *(ens. des vecteurs invariants)* *et* $E_{-1} = \ker(f + id_E) = \{\vec{x} \in E | f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$ *(ens. des vecteurs anti-invariants)*

1. *Montrons que* $\ker(f - id_E) \oplus \ker(f + id_E) = E$
   - ***Partie Analyse:***
     Soit $\vec{x}$ *un vecteur fixé quelconque de* E
     On suppose qu'il existe $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_{-1}$ *tel que* $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ *(1)*
     On a alors $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ *(2)*
     En faisant (1)+(2) on trouve que $\vec{x}_1 = \dfrac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}$
     et en considérant (1)-(2) on trouve que $\vec{x}_1 = \dfrac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}$
     On vient de prouver que: ***SI*** *la décomposition du vecteur* $\vec{x}$ *existe comme somme d'un vecteur de* E_1 *et d'un vecteur de* E_{-1} ***ALORS*** *cette décomposition est unique et que l'on a forcément* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \left(\dfrac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}, \dfrac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}\right)$
     (remarquons qu'à ce niveau nous n'avons pas utilisé l'hypothèse $f^2 = id_E$ *et l'on a pas prouvé que la décomposition existait!)*
   - ***Partie Synthèse:***
     Cette partie consiste à vérifier que les conditions nécessaires trouvées ci-dessus sont également suffisantes.
     Soit $\vec{x}$ *un vecteur fixé quelconque de* E
     On note $\vec{x}_1 = \dfrac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}$ *et* $\vec{x}_2 = \dfrac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}$

     i) on a $\vec{x}_1 \in E_1$. *En effet* $f(\vec{x}_1) = f(\dfrac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2}) = \dfrac{f(\vec{x}) + f^2(\vec{x})}{2}$.
     Or $f^2 = id_E$ *donc* $\dfrac{f(\vec{x}) + f^2(\vec{x})}{2} = \dfrac{f(\vec{x}) + \vec{x}}{2} = \vec{x}_1$

     ii) on a $\vec{x}_2 \in E_{-1}$. *En effet,* $f(\vec{x}_2) = f(\dfrac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2}) = \dfrac{f(\vec{x}) - f^2(\vec{x})}{2} = \dfrac{f(\vec{x}) - \vec{x}}{2} = -\vec{x}_2$

     iii) on a $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \dfrac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2} + \dfrac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2} = \vec{x}$

     Ceci prouve que pour tout vecteur $\vec{x} \in E$ *il existe (un unique) couple* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_{-1}$ *tel que* $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ *(cqfd!)*
   - *L'unicité, si la première partie analyse est bien rédigée, est prouvée dans cette dite partie. On peut aussi montrer que* $E_1 \cap E_{-1} = \{\vec{0}\}$ *(ce n'est pas très compliqué)*
2. *Maintenant que l'on sait que* E_1 *et* E_{-1} *sont supplémentaires dans* E*, on peut considérer la symétrie vectorielle par rapport à* E_1 *parallèlement à* E_{-1}*, notons* s *cette symétrie.*
   - *On a donc* $\forall \vec{x} \in E, \exists! (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_{-1}, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ *et alors* $s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$
   - *ainsi* $\forall \vec{x} \in E, s(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x} + f(\vec{x})}{2} - \dfrac{\vec{x} - f(\vec{x})}{2} = f(\vec{x})$.

   On vient de prouver que $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}) = s(\vec{x})$*, c'est à dire que* $f = s$.

   $\boxed{f \text{ est donc bien la symétrie vectorielle par rapport à } E_1 \text{ parallèlement à } E_{-1}}$