PROBLEME: SUITES RECURRENTES

La partie III de ce problème est indépendante des deux premières

Partie I: applications lipschitziennes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $I \to \mathbb{R}$.
Lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$,
on dit que *l'application f est $k-$lipschitzienne.*

1. On suppose que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et que sa dérivée y est bornée.
   Après avoir rappelé l'inégalité des accroissements finis, justifier que f est $k-$lipschitzienne en précisant la valeur de k.
2. Dans cette question on suppose que $I = [a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$.
   Justifier que f' est une fonction bornée et en déduire que f est $k-$lipschitzienne
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas $k-$lipschitzienne sur $I =]0, +\infty[$

Partie II: applications lipschitziennes et suites récurrentes

Dans cette partie, on considère
- I un intervalle et $0 < k < 1$ un réel
- f une application continue sur I et $k-$lipschitzienne

On suppose également que
- I est un intervalle stable par f, c'est à dire que $f(I) \subset I$.
- il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

Pour $u_0 \in I$ fixé, on définit la suite (u_n) par la relation de récurrence $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = f(u_n)$

1. Soit $(\alpha_1,\alpha_2) \in I^2$ tel que $f(\alpha_1) = \alpha_1$ et $f(\alpha_2) = \alpha_2$.
   Montrer que $\alpha_1 = \alpha_2$
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$
3. Démontrer que si (u_n) converge vers un réel $l \in I$ alors on a forcément $l = \alpha$
4. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k.|u_n - \alpha|$
   (b) En déduire que $\forall n \geqslant 0, |u_n - \alpha| \leqslant k^n.|u_0 - \alpha|$
   (c) Justifier que la suite (u_n) converge toujours quelle que soit la valeur de u_0.
   La limite est-elle indépendante de u_0?

5. Application:
   On s'intéresse à l'équation (E) : $\quad x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$
   (a) Justifier que l'équation (E) possède une unique racine sur $\mathbb{R}$, et que cette racine est située dans l'intervalle $[1,2]$. On la notera α dans la suite de ces questions
   (b) On note $g : x \mapsto \dfrac{20}{x^2 + 2x + 10}$
      i. Justifier que g est continue sur $[1,2]$ et que $[1,2]$ est un intervalle stable par g
      ii. Justifier que $g(\alpha) = \alpha$ et que $\forall (x,y) \in [1,2]^2, |g(x) - g(y)| \leqslant \dfrac{80}{169}|x - y|$
      iii. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = g(u_n)$.
      Après avoir justifié que la suite (u_n) converge vers α, déterminer la valeur du plus petit n_0 pour lequel on est sûr que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près
   (c) En notant $g : x \mapsto x^3 + 2x^2 + 11x - 20$, et en définissant toujours la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = g(u_n)$, pouvait-on encore affirmer que $\lim u_n = \alpha$?

Partie III: point superattractif

On considère dans cette partie une fonction f de classe C^2 sur un intervalle $I = [a,b]$.
On suppose de plus que
- I est un intervalle stable par f
- il existe un réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$ et $f'(\alpha) = 0$
- $|f''|$ est majorée sur I par un réel $M > 0$.

1. (a) Montrer que $\forall (x,y) \in I^2, f(x) = f(y) + (x - y).f'(y) + \int_y^x (x - t) f''(t) dt$
   (b) En déduire que pour tout $x \in I$ on a $|f(x) - \alpha| \leqslant \dfrac{M}{2}|x - \alpha|^2$
2. On définit une suite (u_n) en posant $u_0 \in I$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = f(u_n)$
   (a) Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 0, u_n \in I$
   (b) Justifier que $\forall n \geqslant 1, |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{M}\left[\dfrac{M}{2}|u_0 - \alpha|\right]^{2^n}$ puis que $\forall n \geqslant 1, |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{M}\left[\dfrac{M(b-a)}{2}\right]^{2^n}$
   (c) A quelle condition sur M est-on sûr que la suite (u_n) converge vers α?

$\boxed{\text{CORRECTION}}$

Partie I

1. Rappel de l'**inégalité des accroissements finis**:

   Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $|f'|$ est bornée par une constante réelle M.
   Alors pour tout $(x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant M.|x - y|$

   Ici, par hypothèse, la fonction f est dérivable sur I et la dérivée de f est bornée.
   Notons $\boxed{k \text{ un réel (strictement positif) tel que } |f'| \leqslant k \text{ sur } I.}$
   D'après le théorème rappelé, on peut affirmer que pour tout $(x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k.|x - y|$
   Ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est } k\text{−lipschitzienne}}$

2. On rappelle le théorème suivant

   Toute fonction continue sur un segment est bornée

   Ici, comme f est C^1 sur $[a,b]$, on sait que f' est continue sur le segment $[a,b]$
   et donc par théorème que $\boxed{f' \text{ est bornée}}$
   D'après la première question, on peut affirmer qu'alors $\boxed{f \text{ est } k\text{−lipschitzienne}}$

3. *Nous allons montrer par l'absurde que $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas $k-$lipschitzienne sur $I =]0, +\infty[$*
   On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall (x,y) \in]0, +\infty[^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k.|x - y|$
   On a donc en particulier pour $y = 1$ et tout $x \neq 1$ l'inégalité $\left|\dfrac{1}{x} - 1\right| \leqslant k.|x - 1|$
   c'est à dire encore
   $$k \geqslant \frac{\left|\frac{1}{x} - 1\right|}{|x - 1|} = \frac{\frac{|1 - x|}{|x|}}{|x - 1|} = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$$
   Ceci signifie que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est majorée sur $]0, +\infty[-\{1\}$ or on sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
   Contradiction!

   Conclusion: on a montré que $\boxed{f : x \mapsto \dfrac{1}{x} \text{ n'est pas } k\text{−lipschitzienne sur } I =]0, +\infty[}$

Partie II

1. Soit $(\alpha_1,\alpha_2) \in I^2$ tel que $f(\alpha_1) = \alpha_1$ et $f(\alpha_2) = \alpha_2$.
   Comme f est $k-$lipschitzienne on peut écrire en particulier que
   $$|\alpha_1 - \alpha_2| = |f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| \leqslant k.|\alpha_1 - \alpha_2|$$
   Soit encore
   $$0 \leqslant (k - 1).|\alpha_1 - \alpha_2|$$
   Comme $k < 1$ par hypothèse, on a donc $k - 1 < 0$.
   Ainsi pour que l'inégalité précédente soit réalisée, on doit nécessairement avoir $|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant 0$.

Comme une valeur absolue est toujours positive ou nulle,
on en déduit que nécessairement $|\alpha_1 - \alpha_2| = 0$, c'est à dire $\boxed{\alpha_1 = \alpha_2}$

2. Pour tout $n \geqslant 0$ on note $\mathcal{P}_n$: "$u_n \in I$".
   - **initialisation :** par hypothèse, on a $u_0 \in I$

   - **hérédité :** on suppose la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \geqslant 0$ fixé quelconque, et nous allons montrer qu'elle est vraie pour $\mathcal{P}_{n+1}$
     Par hypothèse, on a $u_n \in I$
     Comme I est stable par f, on a $f(I) \subset I$.
     Ceci nous permet d'affirmer que $u_{n+1} = f(u_n) \in I$, c'est à dire que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

   - **conclusion :** par récurrence, on a montré que $\boxed{\forall n \geqslant 0, u_n \in I}$

3. Supposons que la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$.
   On a par définition pour tout entier $n, u_{n+1} = f(u_n) \quad (*)$
   Comme la fonction f est continue sur I, f est en particulier continue en l (PRECISION INDISPENSABLE), et le théorème de composition des limites permet alors d'affirmer que

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$$

   Ainsi par passage à la limite dans $(*)$ on obtient bien $\boxed{l = f(l)}$

   Par hypothèse, on sait que $\alpha = f(\alpha)$, et on a montré à la question précédente qu'il existait un seul élément de I à vérifier cette propriété.

   Conclusion: $\boxed{\text{si } f \text{ converge vers } l \in I \text{ alors forcément } l = \alpha}$

4. (a) Soit $n \geqslant 0$ un entier.
   Comme $u_n \in I$ et $\alpha \in I$, et sachant que f est $k-$lipschitzienne sur I, on peut écrire

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant k.|u_n - \alpha|$$

   ce qui, sachant que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$, donne

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k.|u_n - \alpha|$$

   On a bien montré que $\boxed{\forall n \geqslant 0, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k.|u_n - \alpha|}$

   (b) Nous allons montrer par récurrence la propriété souhaitée.
   Pour tout $n \geqslant 0$ on note $\mathcal{P}_n$: "$|u_n - \alpha| \leqslant k^n.|u_0 - \alpha|$"

   - **initialisation:** $\mathcal{P}_0$ est trivialement vraie car par convention $k^0 = 1$

- **hérédité:** on suppose la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \geqslant 0$ fixé quelconque, et nous allons montrer qu'elle est vraie pour $\mathcal{P}_{n+1}$
  Par hypothèse de récurrence, on a $|u_n - \alpha| \leqslant k^n.|u_0 - \alpha|$
  D'après la question 3(a), on a $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k.|u_n - \alpha|$
  On en déduit donc par transitivité que

  $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k.|u_n - \alpha| \leqslant k.k^n.|u_0 - \alpha| \leqslant k^{n+1}.|u_0 - \alpha|$$

  On vient de prouver que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

- **conclusion:** On a montré que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0, |u_n - \alpha| \leqslant k^n.|u_0 - \alpha|}$

(c) Comme $0 < k < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$,
et alors le théorème de convergence par encadrement appliqué à l'inégalité précédente permet d'affirmer que $\boxed{\lim u_n = \alpha.}$
Cette limite est indépendante de u_0

5. (a) On considère $\boxed{\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 + 2x^2 + 10x - 20 \end{array}}$

La fonction h est une fonction polynomiale, elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout x réel $h'(x) = 3x^2 + 4x + 10$
Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 4^2 - 4.3.10 < 0$
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) > 0$,
ce qui permet d'affirmer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

La fonction h est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$
donc, d'après *le théorème de la bijection*, on peut en déduire que

i) $h(\mathbb{R})$ est un intervalle
ii) h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $h(\mathbb{R})$

Comme h est continue et croissante on a $h(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty} h, \lim\limits_{+\infty} h[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$
(car $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$*)*

Ayant prouvé que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer qu'il existe un unique réel α tel que $h(\alpha) = 0$.

Comme de plus $h(1) = -7 < 0$ et $h(2) = 16 > 0$, on est même assuré que $\boxed{\alpha \in [1{,}2]}$

(b) i. - g est continue sur $[1{,}2]$, comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.

- La fonction g est décroissante sur $[1{,}2]$ car $\forall x \in [1{,}2], g'(x) = \dfrac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2} < 0$
  On a $g(1) = \dfrac{20}{13} < 2$ et $g(2) = \dfrac{5}{4} > 1$
  et comme la fonction g est décroissante sur $[1{,}2]$, on a

  $$g([1{,}2]) \subset [g(2), g(1)] = \left[\frac{5}{4}, \frac{20}{13}\right] \subset [1{,}2]$$

- conclusion: $\boxed{g \text{ est continue sur } [1{,}2] \text{ et cet intervalle est stable par } g}$

ii. Comme $\alpha^2 + 2\alpha + 10 \neq 0$ (car $\Delta < 0$), on a les équivalences

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 10\alpha - 20 \iff \alpha.(\alpha^2 + 2\alpha + 10) = 20 \iff \alpha = \frac{20}{\alpha^2 + 2\alpha + 10} \iff \alpha = g(\alpha)$$

Nous allons utiliser l'inégalité des accroissements finis à la fonction g.
Pour tout $x \in [1{,}2]$ on a $|g'(x)| = \dfrac{40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}$
Attention! Ici, si l'on se contente de majorer le numérateur (par $40(2+1)$) et de minorer le dénominateur (par $(1^2+2.1+10)^2$, on n'obtient pas la majoration attendue (on obtient hélas $\dfrac{120}{169} > \dfrac{80}{169}$)
On étudie alors les variations de $\varphi : x \mapsto \dfrac{40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}$ sur $[1{,}2]$
Un calcul de dérivée donne $\forall x \in [1{,}2], \varphi'(x) = \dfrac{-120.(x^2+2x-2)}{(x^2+2x+10)^3} < 0$
La fonction φ est ainsi décroissante sur $[1{,}2]$,
et l'on peut affirmer que $\forall x \in [1{,}2], \varphi(x) \leqslant \varphi(1) = \dfrac{80}{13^2} = \dfrac{80}{169}$
On a justifié que $\forall x \in [1{,}2], |g'(x)| \leqslant \dfrac{80}{169}$.

L'inégalité des accroissements finis permet d'affirmer que

$$\boxed{\forall (x,y) \in [1{,}2]^2, |g(x) - g(y)| \leqslant \frac{80}{169}|x-y|}$$

iii. Posons $k = \dfrac{80}{169}$.(on a $0 < k < 1$)
On remarque que la fonction g vérifie toutes les hypothèses de la partie II.
D'après la question 3(c), on peut alors affirmer que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \alpha}$

D'après la question 3(b), on a pour tout $n \geqslant 0, |u_n - \alpha| \leqslant k^n.|u_0 - \alpha|$
Comme u_0 et α sont dans le segment $[1{,}2]$, on a $|u_0 - \alpha| \leqslant 1$
Ainsi pour tout $n \geqslant 0$ on a $|u_n - \alpha| \leqslant k^n$
Pour être sûr que u_n est une valeur approchée de α à 10^{-4} près,
il suffit de choisir n tel que $k^n \leqslant 10^{-4}$
et comme on a les équivalences

$$k^n \leqslant 10^{-4} \iff n \ln k \leqslant -4\ln(10) \iff n \geqslant -\frac{4\ln(10)}{\ln k} = \frac{4\ln(10)}{\ln \frac{169}{80}}$$

$\boxed{n_0 \text{ est donc égal à la partie entière de } \dfrac{4\ln(10)}{\ln \frac{169}{80}} + 1}$
l'application numérique donne $n_0 = 13$

(c) On a toujours $g(\alpha) = \alpha$, mais pour tout $x \geqslant 0$ on a $g'(x) = 2x^2 + 4x + 11 \geqslant 11$.
Cette fois, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, on ne pourrait montrer que l'application g est k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$.
$\boxed{\text{Rien ne nous assure donc, cette fois, que } \lim u_n = \alpha}$

Partie III

1. (a) Soit $(x,y) \in I^2$ fixé.
Nous allons réaliser une intégration par parties sur l'intégrale $\int_y^x (x-t)f''(t)dt$.
On commence par poser $u : t \mapsto f'(t)$ et $v : t \mapsto x-t$.
Ces deux fonction sont de classe C^1 sur I et l'on a $u'(t) = f''(t)$ et $v'(t) = -1$ donc

$$\begin{aligned}\int_y^x (x-t)f''(f)dt &= [(x-t)f'(t)]_y^x - \int_x^y -f'(t)dt \\ &= -(x-y)f'(y) + \int_y^x f'(t)dt \\ &= -(x-y)f'(y) + f(x) - f(y)\end{aligned}$$

On obtient bien l'égalité

$$\boxed{\text{pour tout } (x,y) \in I^2, f(x) = f(y) + (x-y)f'(y) + \int_y^x (x-t)f'(t)dt}$$

(b) Soit $x \in I$.
En appliquant en particulier l'égalité précédente avec $y = \alpha$,
et sachant que $f(\alpha) = \alpha$ et $f'(\alpha) = 0$ on obtient $f(x) = \alpha - \int_\alpha^x (x-t)f'(t)dt$ càd

$$f(x) - \alpha = \int_\alpha^x (x-t)f'(t)dt$$

Puis nous allons utiliser l'inégalité classique:
si g est une fonction continue sur $[a,b]$ alors $\left|\int_a^b g(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |g(t)|dt$

Pour bien faire les choses, on envisage deux cas

- **si $x \geqslant \alpha$.**
  On a alors
  $$|f(x) - \alpha| = \left|\int_\alpha^x (x-t)f'(t)dt\right| \leqslant \int_\alpha^x |(x-t)f'(t)|dt$$
  Or pour tout $t \in [\alpha,x]$, on a
  $$|(x-t)f'(t)| = |x-t|.|f'(t)| \leqslant M.(x-t)$$
  En intégrant sur le segment $[\alpha,x]$ et par croissance de l'intégrale, on a alors
  $$\int_\alpha^x |(x-t)f'(t)|dt \leqslant \int_\alpha^x M.(x-t)dt = \left[-M.\frac{(x-t)^2}{2}\right]_\alpha^x = \frac{M}{2}(x-\alpha)^2$$
  Ainsi, dans le cas où $x \geqslant \alpha$, on a bien $|f(x) - \alpha| \leqslant \dfrac{M}{2}|x-\alpha|^2$

- $\boxed{\textbf{si } x \leqslant \alpha.}$
  On a alors
  $$|f(x)-\alpha| = \left|\int_\alpha^x (x-t)f'(t)dt\right| \leqslant \int_x^\alpha |(x-t)f'(t)|dt$$
  Or pour tout $t \in [x,\alpha]$, on a
  $$|(x-t)f'(t)| = |x-t|.|f'(t)| \leqslant M.(t-x)$$
  En intégrant sur le segment $[x,\alpha]$ et par croissance de l'intégrale, on a alors
  $$\int_x^\alpha |(x-t)f'(t)|dt \leqslant \int_x^\alpha M.(t-x)dt = \left[M.\frac{(t-x)^2}{2}\right]_x^\alpha = \frac{M}{2}(\alpha-x)^2$$
  Ainsi, dans le cas où $x \leqslant \alpha$, on a aussi $|f(x)-\alpha| \leqslant \dfrac{M}{2}|x-\alpha|^2$
- **Conclusion** $\boxed{\forall x \in I, |f(x)-\alpha| \leqslant \dfrac{M}{2}|x-\alpha|^2}$

2. (a) cf. partie II, question 2
   (b) On va utiliser les mêmes raisonnements qu'en la partie II, question 4
   - Pour $n \geqslant 0$, on utilise l'inégalité de 1(b) avec $x = u_n$
     Ce qui donne $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \dfrac{M}{2}|u_n-\alpha|^2$
   - Puis on démontre alors par récurrence et sans difficulté la propriété indiquée.
   - En remarquant enfin que si u_0 et α sont dans le segment $[a,b]$ alors $|u_0-\alpha| \leqslant b-a$, on en déduit la dernière inégalité
   - Comme dans la partie II, on est sûr que $\lim u_n = \alpha$ lorsque $\left|\dfrac{M(b-a)}{2}\right| < 1$