# SUITES NUMERIQUES I

Ce devoir est composÃ© de deux problÃ¨mes indÃ©pendants

## 1 Premier problÃ¨me

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_n^2 \\ u_0 = a, a \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

*Partie 1 Convergence de* $(u_n)$

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrer que cette suite diverge vers l'infini.

*Partie 2 Comportement asymptotique de* $(u_n)$ On définit la suite $(v_n)$ par : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln u_n$

1. Prouver que pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}$ : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln(1+\dfrac{1}{u_n})$. En déduire que quels que soient les entiers naturels $p$ et $n$, on a : $0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+p+1}}\ln(1+\dfrac{1}{u_n})$
2. En déduire que quels que soient les entiers naturels $k$ et $n$ : $0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}\ln(1+\dfrac{1}{u_n})$
3. Démontrer que la suite $(v_n)$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée $\alpha$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \exp(\alpha 2^n)$ . Puis, en passant à la limite pour $n$ fixé dans l'encadrement 2.2, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exp(\alpha 2^n) \leqslant u_n + 1$
   En déduire, lorsque $n$ tend vers l'infini, l'équivalent suivant : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n)$
5. On pose : $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$. Montrer que la suite $(\beta_n)$ est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante : $2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n)$
6. Prouver enfin que lorsque $n$ tend vers l'infini : $u_n = -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(1)$

## 2 Second problÃ¨me

Soient $(a,b,\lambda) \in \mathbb{R}^3$. On se propose d'étudier quelques propriétés des suites réelles $(u_n)$, définies comme suit : $u_0 = \lambda$, et $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+1} = 3u_n^2 - 2(a+b)u_n + ab + 2(a+b)$.

1. On suppose dans cette question que $a = b = 0$ .
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant 0$
   (b) On suppose que $\lambda \neq 0$ et l'on définit la suite $(w_n)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \ln(u_n) + \ln(3/4)$ . Calculer $w_1$ en fonction de $\lambda$ . Exprimer $w_n$ en fonction de $n$ et de $w_1$
   (c) Exprimer, pour tout entier non nul $n$, $u_n$ en fonction de $n$ et de $\lambda$.
   Discuter, selon les valeurs de $\lambda$, la convergence de la suite $(u_n)$, et préciser alors sa limite
2. Dans cette question, on suppose que $a = b = 2$ .
   (a) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

(b) On suppose que la suite $(u_n)$ est convergente. Montrer que sa limite est égale à 2.

(c) On suppose que $\lambda > 2$. Montrer que la suite $(u_n)$ est divergente.

(d) Montrer qu'il existe deux valeurs $\lambda_1$ et $\lambda_2$, $\lambda_1 < \lambda_2$ telles que si $\lambda \in \{\lambda_1,\lambda_2\}$ on a $u_1 = 2$

(e) On suppose $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$. Montrer que la suite $(u_n)$ converge.

(f) On suppose $\lambda < \lambda_1$. Montrer que la suite $(u_n)$ est divergente.

3. Dans cette partie, on suppose que $a < b < 2$ .

(a) On considère l'application polynÃ´me définie comme suit :
$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 3x^2 - 2(2+a+b)x + ab + 2(a+b)$.
Soit $Q$ la primitive de $P$ qui s'annule pour $x = 2$. Déterminer $Q$.
Montrer que $Q$ admet trois racines réelles deux à deux distinctes.

(b) On suppose que la suite $(u_n)$ converge vers une limite $L$.
Montrer que $L$ vérifie l'une des deux inégalités suivantes : $a < L < b$ ou $b < L < 2$.

## CORRECTION DE L'EXERCICE 2 : 13/09/04

1. on a $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2$
   (a) Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, on a $u_n = \frac{3}{4}u_{n-1}^2$ et donc c'est bien positif.
   (b) on a $\boxed{w_1 = \ln(\frac{3}{4}\lambda^2) + \ln\frac{3}{4} = 2(\ln|\lambda| + \ln\frac{3}{4})}$.
   on trouve pour tout $n \geqslant 1, w_{n+1} = 2^{n-1}w_n$, et on obtient donc que $\boxed{\forall n \geqslant 1, w_n = 2^{n-1}w_1}$
   (c) de $\ln u_n + \ln\frac{3}{4} = w_n = 2^{n-1}w_1$, on a $\ln u_n = 2^{n-1}w_1 - \ln\frac{3}{4} = 2^n \ln|\lambda| + (2^n - 1)\ln\frac{3}{4}$.
   En prenant l'exponentiel, cela donne $\boxed{\forall n \geqslant 1, u_n = (\lambda)^{2^n}(\frac{3}{4})^{2^n-1} = \frac{4}{3}\left(\frac{3\lambda}{4}\right)^{2^n}}$.
   *On peut remarquer que la formule est encore valable pour $n = 0$*
2. on a $u_{n+1} = \frac{1}{4}(3u_n^2 - 8u_n + 12)$
   (a) pour tout $n$ positif, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}(u_n - 2)^2 \geqslant 0$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$
   (b) on suppose que la suite $(u_n)$ converge, notons $l$ sa limite. On fait tendre $n$ vers l'infini dans la relation $u_{n+1} = \frac{1}{4}(3u_n^2 - 8u_n + 12)$, ce qui donne $l = \frac{1}{4}(3l^2 - 8l + 12)$ ou encore, après simplification, $(l-2)^2 = 0$. On trouve donc que $\boxed{\text{la seule limite finie possible est } l = 2}$
   (c) On suppose $\lambda = u_0 > 2$. Résumons, le premier terme de la suite $(u_n)$ est strictement supérieur à 2 et la suite est croissante, on a donc $\forall n \geqslant 0, u_n \geqslant u_0 = \lambda$. La suite $(u_n)$ ne peut donc pas tendre vers 2. Or 2 étant la seule limite finie possible, on peut affirmer que la suite $(u_n)$ est divergente. Ainsi $(u_n)$ est une suite croissante divergente : $\boxed{\lim u_n = +\infty}$
   (d) on a $u_1 = 2 \Leftrightarrow 8 = 3\lambda^2 - 8\lambda + 12 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$ . On résout cette équation du second degré, on trouve qu'il y a deux solutions : $\frac{2}{3}$ et 2. On pose $\boxed{\lambda_1 = \frac{2}{3}}$ et $\boxed{\lambda_2 = 2}$, et l'on obtient bien que si $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$ on a $u_1 = 2$.
   (e) considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4}(3x^2 - 8x + 12)$. On a ainsi $\boxed{u_{n+1} = f(u_n)}$. On étudie la fonction $f$, on trouve qu'elle est strictement décroissante sur $]-\infty, \frac{4}{3}]$, strictement croissante sur $[\frac{4}{3}, +\infty[$, que $f(\frac{2}{3}) = f(2) = 2$ et $f(\frac{4}{3}) = \frac{5}{3}$. On a donc $f([\frac{2}{3}, 2]) = [\frac{5}{3}, 2] \subset [\frac{2}{3}, 2]$. Par une récurrence immédiate, il est clair que si $u_0 \in [\frac{2}{3}, 2]$ alors tous les autres termes de la suite $(u_n)$ sont également dans $[\frac{2}{3}, 2]$. En particulier, on en déduit que $(u_n)$ est une suite bornée. Etant croissante et majorée, on peut affirmer qu'elle converge. La seule limite finie possible étant 2, on conclut que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 2.}$
   (f) si $\lambda < \lambda_1 = \frac{2}{3}$, d'après le tableau de variation de $f$, on peut en déduire que $u_1 = f(\lambda) > 2$. Et donc, d'après un raisonnement identique à celui de la question (c) on en conclut que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est divergente.}}$
3. on suppose $a < b < 2$ et toujours $4u_{n+1} = 3u_n^2 - 2(a+b)u_n + ab + 2(a+b)$ (*)
   (a) calcul ! On trouve $Q(x) = (x-2)(x^2 - (a+b)x + ab) = (x-2)(x-a)(x-b)$
   (b) On suppose $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$.
   **D'une part**, on a donc, par passage à la limite dans la relation (*), $L$ qui vérifie l'égalité $4L = 3L^2 - 2(a+b)L + ab + 2(a+b)$, soit encore $P(L) = 0$. On peut encore dire que $L$ vérifie $\boxed{Q'(L) = 0}$. (*$L$ est **une** racine de $Q'$*)
   **D'autre part**, le polynÃ´me $Q$ est un polynÃ´me du troisième degré qui possède trois racines distinctes $a < b < 2$, d'après le théorème de Rolle, $Q'$ va donc s'annuler une fois en $x_1 \in ]a,b[$ et une autre fois en $x_2 \in ]b,2[$. Or $Q'$ étant un polynÃ´me du second degré, il possède au plus deux racines réelles. Comme $x_1$ et $x_2$ sont deux racines réelles distinctes de $Q$, on peut affirmer que *$x_1$ et $x_2$ sont **les** racines de $Q$ (Il n'y en a pas d'autres!).*
   **En conclusion**, on peut en déduire que $L = x_1$ ou $L = x_2$ : d'où $\boxed{L \in ]a,b[ \text{ ou } L \in ]b,2[}$

**Partie 1**

1. on montre par récurrence que pour tout $n$ entier, $u_n > 0$
   - $u_0 > 0$ car par hypothèse $u_0 = a > 0$
   - on suppose $u_n > 0$ : on a alors $u_n + u_n^2 > 0$, c'est à dire que $u_{n+1} > 0$.
   - on a bien montré que $\forall n \geqslant 0, u_n > 0$

   La suite est croissante(strictement même) car $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$
2. La suite $(u_n)$ étant croissante, elle possède nécessairement une limite : soit réelle, soit $+\infty$. Supposons que $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$, alors comme on a la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$, on a nécessairement $l$ qui vérifie l'égalité $l = l + l^2$, ce qui donne $l = 0$. Ainsi si $(u_n)$ possède une limite finie c'est nécessairement 0. Or, on a une contradiction, car $u_0 > 0$ et $(u_n)$ strictement croissante. Conclusion $\boxed{\lim u_n = +\infty}$

**Partie 2**

1. pour tout entier $n$ on a :
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n + u_n^2) - \frac{1}{2^n} \ln u_n \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} (\ln(u_n + u_n^2) - 2 \ln u_n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} (\ln(u_n + u_n^2) - \ln u_n^2) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + \frac{1}{u_n}) \end{aligned}$$
   . Soient $n$ et $p$ deux entiers, $n + p$ étant encore un entier, on peut écrire l'égalité précédente pour l'entier $n+p$, cela donne $v_{n+p+1} - v_{n+p} = \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln(1 + \dfrac{1}{u_{n+p}})$ . Or, on a $u_n \leqslant u_{n+p}$ d'après la croissance de la suite $(u_n)$. D'où la première inégalité : $\boxed{v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln(1 + \dfrac{1}{u_n})}$

   De plus la suite $(u_n)$ étant strictement positive, on a $1 + \dfrac{1}{u_{n+p}} > 1$ et donc on a la deuxième inégalité : $\boxed{v_{n+p+1} - v_{n+p} > 0}$
2. Soient $n$ et $k$ deux entiers fixés. L'encadrement précédent est en particulier vrai pour tous les entiers $p$ compris entre 0 et $k$, ce qui donne l'encadrement de la somme suivant :
   $0 < \sum_{p=0}^{k} v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \sum_{p=0}^{k} \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln(1 + \dfrac{1}{u_n})$. Or :
   - $\sum_{p=0}^{k} v_{n+p+1} - v_{n+p} = v_{n+k+1} - v_n$
   - $\sum_{p=0}^{k} \dfrac{1}{2^{n+p+1}} \ln(1 + \dfrac{1}{u_n}) = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + \dfrac{1}{u_n}) \sum_{p=0}^{k} \dfrac{1}{2^k}$. Et $\sum_{p=0}^{k} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^{k+1}}) < 2$.

     Ce qui donne bien en remplaÃ§ant le résultat voulu : $0 < v_{n+k+1} - v_n = \dfrac{1}{2^n} \ln(1 + \dfrac{1}{u_n})$
3. L'inégalité précédente pour $n = 0$ et $k$ entier quelconque nous donne :
   $0 < v_{k+1} - v_0 \leqslant \ln(1 + \dfrac{1}{u_0}) = \ln(1 + \dfrac{1}{a})$. D'où pour tout entier $k$ on a $v_{k+1} \leqslant v_0 + \ln(1 + \dfrac{1}{a})$ (majorant indépendant de $k$), on peut donc affirmer que la suite $(v_k)$ est <u>majorée</u>. De plus, à la question 2.1, on avait montré que la suite $(v_n)$ était <u>croissante</u> (même strictement), on peut donc affirmer qu'elle converge. On note $\alpha = \lim v_n \in \mathbb{R}$
4. $(v_n)$ étant croissante et tendant vers $\alpha$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant \alpha$, c'est à dire $\ln u_n \leqslant 2^n \alpha$ . Ce qui équivaut encore à $u_n \leqslant \exp(\alpha 2^n)$. On remarque alors que $\alpha$ **est nécessairement strictement positif** , en effet la suite $(u_n)$ tendant vers $+\infty$, on a nécessairement $\exp(\alpha 2^n)$ qui tend aussi vers $\infty$, ce qui se produit uniquement lorsque $\alpha > 0$.

On suit l'indication, à $n$ fixé on fait tendre $k$ vers l'infini dans l'encadrement 2.2, cela donne $\alpha - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\ln(1+\frac{1}{u_n})$, d'où $2^n\alpha \leqslant \ln u_n + \ln(1+\frac{1}{u_n}) = \ln(1+u_n)$. On prend l'exponentiel, et cela nous donne directement $\exp(\alpha 2^n) \leqslant u_n + 1$
Ainsi on a obtenu un encadrement assez précis de $u_n$, en effet : $\exp(\alpha 2^n) - 1 \leqslant u_n \leqslant \exp(\alpha 2^n)$.
On divise chaque membre de cet encadrement par $\exp(\alpha 2^n)$, cela nous donne $1 - \exp(-\alpha 2^n) \leqslant \frac{u_n}{\exp(\alpha 2^n)} \leqslant 1$. Or comme $\alpha > 0$, on a $\lim(1-\exp(-\alpha 2^n)) = 1$, et donc le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim \frac{u_n}{\exp(\alpha 2^n)} = 1$.

C'est la définition de $\boxed{u_n \sim \exp(\alpha 2^n)}$

5. On a déjà d'après les encadrements précédents $\exp(-\alpha 2^n) - 1 \leqslant u_n \leqslant \exp(-\alpha 2^n)$, ce qui équivaut à $0 \leqslant \beta_n \leqslant 1$. $\boxed{\text{La suite } (\beta_n) \text{ est bien bornée}}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n &= (\exp(\alpha 2^{n+1}) - u_n - u_n^2) + (\exp(\alpha 2^{n+1}) - 2.u_n.\exp(\alpha 2^n) + u_n^2) - (\exp(\alpha 2^n) - u_n)\\ &= 2\exp(\alpha 2^{n+1}) - 2.u_n\exp(\alpha 2^n) - \exp(\alpha 2^n)\end{aligned}$$

Et par conséquent, cela donne $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n) = 2.\exp(\alpha - 2^n) - 2u_n - 1 = 2\beta_n - 1$

6. Faisons maintenant tendre $n$ vers l'infini dans l'égalité précédent.D'une part, comme $\alpha > 0$, on a $\lim \exp(-\alpha 2^n) = 0$. D'autre part, comme la suite $(\beta_n)$ est bornée, on en déduit que la suite $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)$ est bornée. Donc, $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n)$ est le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers zéro, donc tend vers zéro. On a ainsi justifié que $\lim(2\beta_n - 1) = 0$, c'est à dire que $\lim \beta_n = \frac{1}{2}$. On écrit alors que $\beta_n = \frac{1}{2} + o(1)$, et l'on a donc
$\boxed{u_n = \exp(\alpha 2^n) - \beta_n = \exp(\alpha 2^n) - \frac{1}{2} + o(1)}$