Révisions de 1ère année:
Sous-espaces vectoriels

Table des matières

Dans tout ce polycopié, $\mathbb{K}$ désignera comme toujours le corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

exemple 1: Les espaces vectoriels sont partout!

1. $(\mathbb{R}^n, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
2. $(\mathbb{C}^n, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$
3. $(\mathbb{C}^n, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
4. $(\mathbb{R}[X], +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
5. $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
6. $(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$
7. $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
8. $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
9. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs réelles est un $\mathbb{R}-$ev.
10. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs complexes est un $\mathbb{C}-$ev.
11. Plus généralement, l'ensemble des fonctions définies sur un ensemble X et à valeurs dans un espace vectoriel est aussi un espace vectoriel.

Comme on appelle vecteur tout élément d'un ev; un polynôme, une fonction, une matrice,... sont des vecteurs!

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition et règles de calcul

définition 1: espace vectoriel(à ne pas retenir)

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-ev, est un triplet $(E, + ,.)$ dans lequel E est un ensemble non vide muni de deux lois l'addition : "+" et la multiplication : "." telles que

1. "+"est une loi interne : $(x,y) \in E \times E \to x + y \in E$ qui vérifie :
   - $\forall (x,y) \in E \times E, \quad x + y = y + x$ commutativité
   - $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ associativié
   - il existe un élément dans E noté $\vec{0}$ tel que $\forall x \in E, x + \vec{0} = \vec{0} + x = x$. $\vec{0}$ est l'élément neutre pour "+"
   - Pour tout $x \in E$ il existe un élément dans E noté $-x$ appelé le symétrique de E tel que $x + (-x) = (-x) + x = \vec{0}$

   autrement dit $(E,+)$ est un groupe commutatif
2. "." est une loi externe : $(\lambda,x) \in \mathbb{K} \times E \to \lambda.x \in E$ qui vérifie :
   - $\forall (\lambda,\mu,x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E, \quad (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$ distributivité
   - $\forall (\lambda,y,x) \in \mathbb{K} \times E \times E, \quad \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$ distributivité
   - $\forall (\lambda,\mu,x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E, \quad (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$ associativité
   - $\forall x \in E, \quad 1.x = x$ 1 est neutre pour "."

   rem: on peut écrire $\lambda\vec{x}$ au lieu de $\lambda.\vec{x}$

On a alors aussi:

- $\forall (\lambda,\vec{x}) \in \mathbb{K} \times E, \quad \lambda.x = \vec{0} \Longleftrightarrow x = \vec{0}$ ou $\lambda = 0$
- $\forall (\lambda,\vec{x}) \in \mathbb{K} \times E, \quad (-\lambda).x = -(\lambda.x) = \lambda.(-x)$
- $\forall (\lambda,\mu,\vec{x},\vec{y}) \in \mathbb{K}^2 \times E^2, \quad \lambda.(\vec{x} - \vec{y}) = \lambda.\vec{x} - \lambda.\vec{y}$ et $(\lambda - \mu).\vec{x} = \lambda.\vec{x} - \mu.\vec{x}$

définition 2: vecteurs et scalaires

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle

- vecteurs les éléments de E.
- scalaires les éléments de $\mathbb{K}$.(càd les réels ou les complexes)

Suivant l'humeur, on notera les vecteurs avec une flèche ou sans.

définition 3: combinaison linéaire

Soit $\mathcal{F} = (\vec{x}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de n vecteurs de E.

On appelle combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$ toute somme de la forme $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.\vec{x}_k$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont n scalaires.

rem: on verra dans un autre polycopié la définition d'une combinaison linéaire dans le cas où la famille possède une infinité de vecteurs

exemple 2: combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{K}^n$

- Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de ses lois usuelles.
- Considérons les vecteurs $\boxed{\vec{x}_1 = (1,0,1,0)}$ et $\boxed{\vec{x}_2 = (0,3,0,4)}$
- Une combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F} = (\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ est un vecteur qui s'écrit $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2$ avec $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$
- Les combinaisons linéaires de la famille $(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ (on dit aussi "les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$") sont donc les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui s'écrivent $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 = (\lambda_1,3\lambda_2,\lambda_1,4\lambda_2)$
- Le vecteur $(2,-3,2,-4)$ est une combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$,
  mais le vecteur $(2,3,3,4)$ n'en est pas une.
  Le vecteur nul $(0,0,0,0)$ est bien sûr une combinaison linéaire de $(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$

exemple 3: combinaison linéaire de fonctions

- Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de ses lois usuelles.
- Considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos(t) \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(t) \end{array}}$
- Une combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F} = (f,g)$ est un élément de E (càd une fonction $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$) qui s'écrit $\lambda.f + \mu.g$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$
- Les combinaisons linéaires de la famille $\mathcal{F} = (f,g)$ sont donc les fonctions h qui sont définies comme suit
  $$\boxed{\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda.\cos(t) + \mu.\sin(t) \end{array}} \text{ avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$
- La fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} m:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{2}\cos(t+\pi/4) \end{array}}$ est-elle une combinaison linéaire des fonctions f et g?
  On a pour tout t réel, $m(t) = \sqrt{2}\cos(t+\pi/4) = \cdots = \cos(t) - \sin(t) = f(t) - g(t)$
  Ceci prouve que $m = f - g$
  On a justifié que m *est une combinaison linéaire de* f *et* g
  (à retenir: **pour montrer une égalité entre des fonctions, on a montré une égalité sur les images**)
- La fonction exp est-elle une combinaison linéaire de f et g?
  On remarque que les combinaisons linéaires de f *et* g *ont toutes la propriété d'être bornées (ou encore d'être* $2\pi-$*périodiques)*
  Or la fonction exp *n'est pas bornée (ou n'est pas* $2\pi-$*périodique)*
  Ceci permet de justifier simplement que la fonction exp *n'est pas une combinaison linéaire de* f *et* g*!*

  Si l'on n'avait pas remarqué ceci, pour montrer que exp n'était pas une combinaison linéaire de f et de g, il aurait fallu justifier qu'il n'existait pas deux réels λ et μ tels que $\exp = \lambda.f + \mu.g$.
  Pour cela, on aurait suivi **le raisonnement par l'absurde** suivant.
  Supposons qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $\exp = \lambda.f + \mu.g$.
  On a alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(t) = \lambda.\cos(t) + \mu.\sin(t)$
  En évaluant pour $t = \pi/2$ *et* $t = -\pi/2$, *on trouve* $\mu = \exp(\pi/2)$ *et* $\mu = -\exp(-\pi/2)$
  ce qui donne ***une contradiction.***
  Conclusion: on a montré par l'absurde que $\nexists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\exp = \lambda.f + \mu.g$
  c'est à dire que $\boxed{\text{exp n'est pas combinaison linéaire de } f \text{ et } g.}$

exemple 4: combinaisons linéaires de suites numériques

Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ev des suites réelles muni des lois usuelles.
Notons u la suite constante égale à un et v la suite définie par $\forall n \geqslant 0, v_n = n$

- Une combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}=(u,v)$ est un élément de E (càd une suite à valeurs réelles) qui s'écrit $a.u+b.v$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
- Les combinaisons linéaires de la famille (u,v) sont donc les suites w qui sont définies par

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, w_n = a.u_n + b.v_n = a + b.n} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels (indépendants de } n\text{)}$$

- Ceci prouve que les combinaisons linéaires de la famille (u,v) sont les suites arithmétiques

proposition 1 (***produit cartésien de sev (résultat à négliger en première lecture)***)

Soit $E_1,\dots,E_n$ n $\mathbb{K}$-ev.
Alors $E=E_1\times\dots\times E_n$ *est un* $\mathbb{K}$*-ev lorsqu'on le munit de*
l'addition : $(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$ *et*
de la multiplication : $\lambda.(x_1,\dots,x_n)=(\lambda.x_1,\dots,\lambda.x_n)$
En particulier si E *est un* $\mathbb{K}$*-ev, alors* E^n *est un* $\mathbb{K}$*-ev*

1.2 Sous-espace vectoriel

définition 4: sous-espace vectoriel

Soit F une partie (= sous-ensemble) non vide d'un $\mathbb{K}$-ev E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel [sev] de E lorsque $\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2, \forall\lambda\in\mathbb{K}, \lambda.\vec{x}+\vec{y}\in F$

remarque 1

1. *F est un sev de E lorsque pour toute famille finie de scalaires $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et pour toute famille finie de vecteurs $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$, de F : on a $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k.\vec{x}_k\in F$*

   On dit que $\boxed{\text{$F$ doit être stable par combinaison linéaire.}}$
2. *Si F est un sev de E, alors les lois "+" et "." de E induisent dans F des lois qui donnent à F une structure de* $\mathbb{K}$*-ev*
3. *Dans la pratique, pour justifier qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montre qu'il est non vide, inclus dans un espace vectoriel connu, et stable par combinaison linéaire.*

remarque 2

On a comme définition(s) équivalente(s) :

- *F est un sous-espace vectoriel de E lorsque $\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2, \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \lambda.\vec{x}+\mu.\vec{y}\in F$*
- *F est un sous-espace vectoriel de E lorsque $\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2, \forall\lambda\in\mathbb{K}, \vec{x}+\vec{y}\in F$ et $\lambda.\vec{x}\in F$*

méthode 1: comment montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel on n'utilisera jamais la définition 1; on vérifiera que c'est toujours un sev d'un espace vectoriel connu E. Pour cela, on montrera que

i) F est inclus dans E

ii) F est non vide

iii) F est stable par combinaison linéaire, càd $\forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2, \forall\lambda\in\mathbb{K}, \lambda.\vec{x}+\vec{y}\in F$

exemple 5: $\mathbb{R}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$ (démonstration)

- $\mathbb{R}_n[X]$ est inclus dans $\mathbb{R}[X]$
- $\mathbb{R}_n[X]$ est non vide car il contient le polynôme nul qui est bien de degré inférieur ou égal à n
- $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire car si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et λ un réel alors $\lambda.P + Q$ est bien encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

ici, pour démontrer la stabilité par combinaison linéaire on s'est appuyé sur nos connaissances sur les polynômes

exemple 6:

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0\}$. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^3$.

- *F est bien inclus dans $\mathbb{R}^3$*
- *F n'est pas vide* car contient $(0,0,0)$ (puisque $0 + 0 - 2.0 = 0$)
- *F est stable par combinaison linéaire.*
  En effet, soit $u = (x_1,y_1,z_1)$ et $v = (x_2,y_2,z_2)$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Notons $w = \lambda.u + v$
  On a donc $w = (x_3,y_3,z_3) = (\lambda.x_1 + y_1, \lambda.y_2 + z_2, \lambda.y_3 + z_3)$.
  Pour vérifier que $w \in F$, nous allons vérifier que $x_3 + y_3 - 2z_3 = 0$.
  On a

$$\begin{aligned} x_3 + y_3 - 2z_3 &= (\lambda.x_1 + y_1) + (\lambda.y_2 + z_2) - 2(\lambda.y_3 + z_3) \\ &= \lambda.(x_1 + y_1 - 2z_1) + (x_2 + y_2 - 2z_2) \end{aligned}$$

  Or $x_1 + y_1 - 2z_1 = 0$ et $x_2 + y_2 - 2z_2 = 0$ car u et v appartiennent à F,
  d'où $x_3 + y_3 - 2z_3 = \lambda.0 + 0 = 0$
  ce qui prouve que $w \in F$!

théorème 1: intersection de sous-espaces vectoriels

Soient $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. (I peut être un ensemble infini d'indices)
Alors :

$$\bigcap_{i\in I} F_i \text{ est un sous-espace vectoriel de E}$$

on retient que "L'intersection de sev est encore un sev"
Attention! En général la réunion de sev n'est pas un sev! (d'où la définition 6=

démonstration 1

Soient $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.
Notons $G = \bigcap_{i\in I} F_i$.

- *Comme tous les F_i sont des sous-ensembles de E, leur intersection est encore un sous -ensemble de E. Ceci prouve déjà que G est un sous-ensemble de E.*
- *Comme les F_i sont des sev, ils contiennent chacun le vecteur nul: le vecteur nul est donc également présent dans leur intersection. Ceci prouve que G est un ensemble non vide.*
- *Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de G, et λ un scalaire.*
  Considérons $z = \lambda.\vec{x} + \vec{y}$.
  Comme $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des éléments de G, ceci signifie qu'ils appartiennent à chacun des F_i. Or chaque F_i est un sev et est donc stable par combinaison linéaire, ceci nous permet d'affirmer que $\lambda\vec{x} + \vec{y}$ est dans tous les F_i, et par conséquent dans leur intersection: ceci prouve que $\lambda\vec{x} + \vec{y} \in G$

définition 5: espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ une famille finie de vecteurs de E
L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{vect}(\mathcal{F})$ et appelé espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$:

$$\boxed{\mathrm{vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{vect}(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}) = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.\vec{x}_k \,|\, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}}$$

On montre que c'est le plus petit sev qui contient tous les vecteurs $\vec{x}_i$ avec $i \in [\![1,n]\!]$

démonstration 2

- *Il est facile de montrer que $\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k \,|\, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$ est un sev de E en effectuant les vérifications usuelles (non vide, inclus dans E et stable par combinaisons linéaires)*
- *Montrons qu'il s'agit du plus petit sev (au sens de l'inclusion)qui contient tous les vecteurs $\vec{x}_i$.*
  Considérons pour cela un sev F qui qui contient tous les vecteurs $\vec{x}_i$,
  et montrons que $\mathrm{vect}(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}) \subset F$
  Soit $\vec{x} \in \mathrm{vect}(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\})$
  Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.\vec{x}_k$
  Comme F est stable par combinaison linéaire (car par hypothèse c'est un sev) et que les $\vec{x}_k$ sont des éléments de F, on en déduit que $\vec{x} \in F$.
  On a prouvé que tout élément de $\mathrm{vect}(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\})$ était forcément un élément de E,
  ce qui équivaut à dire que $\mathrm{vect}(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}) \subset F$ (cqfd)
  rem: on a prouvé l'implication $\vec{x} \in \mathrm{vect}(\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}) \Longrightarrow \vec{x} \in F$

exemple 7: droites et plans vectoriels

Soient x_1 et x_2 deux vecteurs d'un espace vectoriel E.

- on a $\mathrm{vect}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$. Le singleton $\{\vec{0}\}$ est le plus petit sev du monde!
- si $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ alors $\boxed{\mathrm{vect}\,\vec{x}_1 =< \vec{x}_1 >= \{\lambda.\vec{x}_1 \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\}}$ est la droite vectorielle engendrée par $\vec{x}_1$
- si $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ ne sont pas colinéaires alors
  $\boxed{\mathrm{vect}(\vec{x}_1,\vec{x}_2) =< \vec{x}_1,\vec{x}_2 >= \{\lambda.\vec{x}_1 + \mu.\vec{x}_2 \,|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\}}$ est le plan vectoriel engendré par $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$

exemple 8: un exemple dans $\mathbb{R}^4$

- Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère $\vec{x}_1 = (1,0,0,0), \vec{x}_2 = (0,1,0,0)$ et $\vec{x}_3 = (0,0,1,0)$
- On a par définition

$$\mathrm{vect}(\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}) = \{\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2 + \lambda_3\vec{x}_3 | (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3\} = \{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0) \,|\, (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3\}$$

  L'ev engendré par $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$ est donc l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui ont leur quatrième composante nulle(et les trois autres indépendantes entre elles)
- rem: cet espace n'est pas pour autant $\mathbb{R}^3$!

méthode 2: comment montrer qu'un ensemble est un sev II

Pour montrer qu'un sous-ensemble F de l'ev E est un sev il suffit de pouvoir écrire F comme "vect" d'une certaine famille.

Exemple:

Montrer que $F = \{(x+y,x-y,2x+y)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ *est un sev de* $\mathbb{R}^3$.

Il suffit d'écrire que

$$F = \{(x+y,x-y,2x+y)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,1,2)+y(1,-1,1)|(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((1,1,2),(1,-1,1))$$

F est le sev engendré par les vecteurs $(1,1,2)$ *et* $(1,-1,1)$

exemple 9: un exemple dans $\mathbb{R}_2[X]$

- On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ et les deux vecteurs $P_1 = P_1(X) = (X-1)$ et $P_2 = P_2(X) = X^2 - 1$.
- Les combinaisons linéaires de P_1 et P_2 sont par définition les polynômes P qui s'écrivent $P = aP_2 + bP_1 = a(X^2-1) + b(X-1)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
  On a donc
  $$\boxed{\text{vect}(\{P_1,P_2\}) =< P_1,P_2 >= \{aX^2 + bX - a - b|(a,b) \in \mathbb{R}^2\}}$$
- Notons G l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux qui ont un comme racine.
  i) on a $\boxed{\text{vect}(\{P_1,P_2\}) \subset G}$.
  En effet, soit P un élément de $\text{vect}(\{P_1,P_2\})$
  Ceci signifie qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $P = P(X) = a(X^2-1) + b(X-1)$.
  On a $P(1) = a(1^2-1) + b(1-1) = 0$ *et on constate alors que P est un polynôme de degré au plus deux qui possède un comme racine, càd que* $P \in G$

  ii) on a $\boxed{G \subset \text{vect}(\{P_1,P_2\})}$.
  En effet, soit P un élément de G.
  Par définition, il existe 3 réels a, b et c tel que $P = aX^2 + bX + c$ *et* $P(1) = 0$.
  On en déduit donc que $c = -a-b$ *et ainsi que* $P = aX^2 + bX - a - b = a(X^2-1) + b(X-1)$.
  ce qui prouve que P est un élément de $\text{vect}(\{P_1,P_2\})$

$\boxed{\text{Conclusion: vect}(\{P_1,P_2\}) = G}$

1.3 Somme de deux sous-espaces vectoriels

définition 6: somme de 2 sev

Soient F_1 et F_2 étant deux sev de E.

i) On appelle espace vectoriel somme de F_1 et F_2, et on note $F_1 + F_2$, l'ensemble :
$$\boxed{F_1 + F_2 = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 | \vec{x}_1 \in F_1 \text{ et } \vec{x}_2 \in F_2\}}$$
on montre que c'est le plus petit sev de E qui contient à la fois F_1 et F_2,
càd $\boxed{F_1 + F_2 = \text{vect}(F_1 \cup F_2)}$

ii) On dit que F_1 et F_2 sont en somme directe, et on note $F_1 \oplus F_2$, lorsque la décomposition de tout vecteur de $F_1 + F_2$ comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 est unique.
càd $\forall \vec{x} \in F_1 + F_2, \exists!(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in F_1 \times F_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ (l'écriture est unique)
rem: pour tout $\vec{x} \in F_1 + F_2$ on sait par définition qu'il existe une décomposition de la forme $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ avec $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in F_1 \times F_2$. Lorsque la décomposition est toujours unique on dira que F_1 et F_2 sont en somme directe

remarque 3 (***Il ne faut surtout pas confondre l'ensemble $F_1 + F_2$ et l'ensemble $F_1 \cup F_2$!***)

Pour vous en convaincre considérer l'exemple suivant :

$E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$, $F_2 = \{(0,x)|x \in \mathbb{R}\}$

- $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^2$ *est le plan tout entier*

- $F_1 \cup F_2$ *est simplement la réunion des deux axes.*

théorème 2: démo en exo

Il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

i.) F_1 et F_2 sont en somme directe

ii.) La décomposition de $\vec{0}$ est unique.
(càd que si $\vec{0}$ s'écrit $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ avec $\vec{x}_1 \in F_1$ et $\vec{x}_2 \in F_2$ alors forcément $\vec{x}_1 = \vec{0}$ et $\vec{x}_2 = \vec{0}$.)

iii.) $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

méthode 3: pour montrer que deux sev sont en somme directe

En général, on montre que l'intersection $F_1 \cap F_2$ est réduit au vecteur nul.

exemple:

Montrer que $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + 2z = 0\}$ et $F_2 = \{(2\lambda,\lambda,3\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ sont en somme directe.

Soit $\vec{u} \in F_1 \cap F_2$

Comme $\vec{u} \in F_2$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = (2\lambda,\lambda,3\lambda)$

Et comme de plus $\vec{u} \in F_1$ on a alors $2\lambda + \lambda + 2.3\lambda = 0$, ce qui donne $\lambda = 0$

et donc en reportant $\vec{u} = (0,0,0) = \vec{0}$

Nous venons de prouver que $F_1 \cap F_2 \subset \{\vec{0}\}$, et donc que F_1 et F_2 sont en somme directe

remarque 4 (***attention à la généralisation***)

En revanche, on verra que pour montrer que n sev sont en somme directe, on ne pourra considérer les intersections mais qu'il faudra justifier de l'unicité de la décomposition du vecteur nul

exemple 10:

- Considérons $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- Notons $F_1 = \{f \in E | f^{(3)} + f^{(2)} + f' + f = 0\}$ et $F_2 = \{f \in E | f$ est 2π périodique$\}$
- On remarque que la fonction sin est dans F_1 et dans F_2
  et donc on en déduit que F_1 et F_2 ne sont pas en somme directe.

définition 7: espaces supplémentaires

On dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E lorsque $F_1 \oplus F_2 = E$

Il ne faut pas confondre supplémentaires et complémentaires

Le complémentaire d'un sev n'est jamais un sev car il ne contient pas le vecteur nul!

théorème 3: démo en exo

Il y a équivalence entre les 4 propriétés ci-dessous :

i.) F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E

ii.) $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

iii.) $\forall \vec{x} \in E\,, \exists!(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in F_1 \times F_2\,, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$

iv.) $\forall \vec{x} \in E\,, \exists(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in F_1 \times F_2\,, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

autrement dit, F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E lorsque tout vecteur $\vec{x}$ de E peut s'écrire de manière unique comme la somme d'un vecteur $\vec{x}_1$ de F_1 et d'un vecteur $\vec{x}_2$ de F_2.

rem: il existe aussi d'autres caractérisation importantes en dimension finie. (voir plus loin)

méthode 4: comment montrer que deux sev sont supplémentaires (dim.quelconque)

Généralement, on utilise la propriété iv) du théorème ci-dessus

exemple:

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(rem: on sait alors que E est un $\mathbb{R}$-ev (de dimension infinie) et que $\vec{0}_E$ désigne la fonction constante nulle sur $\mathbb{R}$.)

On considère $F_1 = \{f \in E | f(1) = 0\}$ et $F_2 = \{f \in E | f' = 0\}$

Montrer que F_1 et F_2 supplémentaires dans E?

- *Montrons, par double inclusion, que $F_1 \cap F_2$ est réduit au vecteur nul.*
  - $\boxed{\{\vec{0}\} \subset F_1 \cap F_2}$ car F_1 et F_2 étant des sev, ils contiennent tous les deux le vecteur nul et donc leur intersection également.
  - Montrons que $\boxed{F_1 \cap F_2 \subset \{\vec{0}\}}$.
    Soit $f \in F_1 \cap F_2$.
    Ceci signifie que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ (car $f \in F_2$) et que sa valeur en 1 est 0. On a donc f qui est la fonction constante nulle sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que $f = \vec{0}_E$. cqfd!
- *Montrons que tout élément de E s'écrit comme la somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.*
  Soit $f \in E$ une fonction donnée.
  Notons $a = f(1) \in \mathbb{R}$ et considérons:
  - la fonction h définie comme étant la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à a. On a bien sûr $h \in F_2$
  - la fonction g définie par $g = f - h$ (g est la différence de f et d'une fonction constante, la fonction g est donc encore un élément de E). On remarque de plus que $g(1) = f(1) - a = 0$, on peut donc en déduire que $g \in F_1$

  Il est clair que l'on a $f = g + h$!
  On a bien montré que $\forall f \in E, \exists(g,h) \in F_1 \times F_2, f = g + h$
  *remarque: ici, la décomposition (c'est à dire les fonctions g et h) était simple à trouver. Dans les cas plus compliqués, on procède par **un raisonnement d'Analyse-Synthèse***

théorème 4: admis

Tout sev de F de E admet un supplémentaire dans E

- *c'est à dire qu'il existe une sev G de E tel que $F \oplus G = E$*
- *si F n'est pas l'espace E lui-même, ni le singleton vecteur nul, alors il n'y a pas unicité du sev supplémentaire G*

exemple 11: supplémentaire dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

1. Soit $E=\mathbb{R}^2$ et F une droite vectorielle de E.
   Un supplémentaire de F dans E est toute droite différente de F
2. Soit $E=\mathbb{R}^3$ et F une droite vectorielle de E.
   Un supplémentaire de F dans E est tout plan ne contenant pas F
3. Soit $E=\mathbb{R}^3$ et F un plan vectoriel de E.
   Un supplémentaire de F dans E est toute droite non incluse dans le plan

1.4 Familles génératrices

définition 8: famille génératrice finie

Soit $\mathcal{F}=(\vec{x}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille (finie) de vecteurs d'un espace vectoriel E.
On dit que la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E lorsque $E=\text{vect}(\mathcal{F})$
cád

$$\forall \vec{x}\in E\,,\exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n \text{ tels que } \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i.\vec{x}_i$$

càd $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E lorsque tout vecteur $\vec{x}$ de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$.(cette décomposition n'étant pas forcément unique)

Cette année on verra les familles génératrices de cardinal infini!

méthode 5: comment montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E

On montre que tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'élements de la famille $\mathcal{F}$
Exemple:
Montrer que $(X,X+1,X^2,X^2-1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$
Pour cela on va montrer que tout polynôme de degré au plus deux est une combinaison linéaire de $(X,X+1,X^2,X^2-1)$
Soit $P=aX^2+bX+c$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$ fixé.
On va montrer qu'il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ tel que $P=\lambda_1X+\lambda_2(X+1)+\lambda_3X^2+\lambda_4(X^2-1)$.
On a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned}
P=\lambda_1X+\lambda_2(X+1)+\lambda_3X^2+\lambda_4(X^2-1) &\Leftrightarrow aX^2+bX+c=\lambda_1X+\lambda_2(X+1)+\lambda_3X^2+\lambda_4(X^2-1)\\
&\Leftrightarrow aX^2+bX+c=(\lambda_3+\lambda_4)X^2+(\lambda_1+\lambda_2)X+\lambda_2-\lambda_4\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a &= \lambda_3+\lambda_4\\ b &= \lambda_1+\lambda_2\\ c &= \lambda_2-\lambda_4\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 &= b-c-\lambda_4\\ \lambda_2 &= c+\lambda_4\\ \lambda_3 &= a-\lambda_4\end{cases}
\end{aligned}$$

ce qui montre que la décomposition existe bien
(on a trouvé que la décomposition n'était pas unique(car le choix de λ_4 est arbitraire); on a ainsi montré que la famille $(X,X+1,X^2,X^2-1)$ était liée (cf.prochain paragraphe))

théorème 5:

i) Toute sur-famille d'une famille génératrice est encore une famille génératrice.

ii) Si un vecteur de la famille génératrice est combinaison linéaire des autres alors en le retirant de la famille on obtient encore une famille génératrice
mais attention car en général, une sous-famille d'une famille génératrice n'est pas génératrice

remarque 5 (*vocabulaire: sous-famille, sur-famille*)

- *la proposition précédente doit vous sembler évidente... car elle l'est!*
- *une sous-famille d'une famille $\mathcal{F}$ n'est rien d'autre qu'un sous-ensemble de $\mathcal{F}$.*
- *une sur-famille d'une famille $\mathcal{F}$ est un ensemble qui contient $\mathcal{F}$*

exemple 12:

Soit $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de E
Si $\text{vect}(\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{u}+3\vec{v}) = E$ alors on peut affirmer que $E = \text{vect}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ car dans la première famille, le quatrième vecteur $(\vec{u}+3\vec{v})$ est combinaison linéaire des deux premiers

exemple 13: un exemple à méditer

Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+3y=0\}$ et $E' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+3y=0\}$
Déterminer une famille génératrice de E et une de E'.

- $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+3y=0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x=-3y\} = \{(-3y,y,z) | (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$
  Ainsi
$$E = \{y(-3,1,0)+z(0,0,1) | (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((-3,1,0),(0,0,1))$$
- $E' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+3y=0\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x=-3y\} = \{(-3y,y,z,t) | (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\}$
  Ainsi
$$E' = \{y(-3,1,0,0)+z(0,0,1,0)+t(0,0,0,1) | (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\} = \text{vect}((-3,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$$

rem: E et E' sont des hyperplans: on verra cette année un théorème qui nous permet de donner directement la dimension de ces espaces

1.5 Familles libres. Familles liées

définition 9: famille libre

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_n})$ une famille de vecteurs de E.

i) on dit que la famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_n})$ est libre lorsque
$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\lambda_1.\vec{x}_1+\dots+\lambda_n.\vec{x}_n = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0)$$

ii) on appelle famille liée toute famille qui n'est pas libre.

càd qu'une famille est libre ssi la seule combinaison linéaire nulle de vecteurs de $\mathcal{F}$ est obtenue avec des scalaires tous nuls.

remarque 6

- *toute famille contenant le vecteur nul est liée.*
- *la famille $\{\vec{x}\}$ est libre ssi $\vec{x} \neq \vec{0}$.*
- *toute famille contenant deux fois le même vecteur est liée.*

proposition 2

Il y a équivalence entre :

i.) la famille $(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ est liée.

ii.) $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont proportionnels. (ou $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont colinéaires)

iii.) $\vec{x}_1 = \vec{0}$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{K}\,, \vec{x}_2 = \lambda \vec{x}_1$

mais ce n'est pas équivalent à dire seulement que $\exists \lambda \in \mathbb{K}\,, \vec{x}_2 = \lambda \vec{x}_1$.
En effet, considérons $\vec{x}_1 = \vec{0}$ et $\vec{x}_2$ un vecteur non nul.

- *$(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ est une famille liée, car elle contient le vecteur nul*
- *$\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont colinéaires, en effet $\vec{x}_2 = 0.\vec{x}_1$*
- *mais il n'existe pas de scalaire λ tel que $\vec{x}_2 = \lambda.\vec{x}_1$*

théorème 6: démo en exercice

Si $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_k,\vec{x}_{k+1},\dots,\vec{x}_n)$ est une famille libre de E alors les sous-espaces vectoriels $\text{vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_k)$ et $\text{vect}(\vec{x}_{k+1},\dots,\vec{x}_n)$ sont en somme directe.

méthode 6: comment montrer qu'une famille est libre

On écrit une combinaison linéaire nulle de vecteurs de cette famille et on montre que tous les scalaires sont forcément nuls.

exemple 14: un exemple dans $\mathbb{R}^4$

Soit $\delta \in \mathbb{R}$.
Dans $E = \mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $\vec{x}_1 = (1,1,1,0)$, $\vec{x}_2 = (2,3,0,2)$ et $\vec{x}_3 = (1,3,-3,\delta)$.
Nous allons étudier, suivant les valeurs de δ la liberté de la famille $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 + c\vec{x}_3 = \vec{0}$

On a donc $a(1,1,1,0) + b(2,3,0,-2) + c(1,3,-3,\delta) = (0,0,0,0)$

ce qui équivaut au système $\begin{cases} a+2b+c &= 0 \\ a+3b-3c &= 0 \\ & \\ & \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 3c \\ b &= -2c \\ (\delta-4)c &= 0 \end{cases}$

i) si $\delta \neq 4$ le système précédent équivaut á $a = b = c = 0$.
Dans ce cas, la famille est donc libre

ii) si $\delta = 4$ le système précédent équivaut á $\begin{cases} a &= 3c \\ b &= -2c \end{cases}$.
Comme ce système admet une infinité de solutions (et donc pas seulement $a = b = c = 0$) on en déduit que dans ce cas, la famille est liée

Conclusion: $\boxed{\text{la famille est libre ssi } \delta \neq 4}$

remarque: dans le cas où $\delta = 4$ on a $3\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3 = 0$
On voit qu'il est alors possible d'exprimer chacun des vecteurs en fonction des deux autres.
par exemple $\vec{x}_2 = \dfrac{3}{2}\vec{x}_1 + \dfrac{1}{2}\vec{x}_3$

exemple 15: un exemple dans l'espace des suites numériques

Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on considère les suites $u = (u_n) = (2^n), v = (v_n) = (3^n)$ et $w = (w_n) = (4^n)$
Nous allons montrer que la famille (u,v,w) est une famille libre de E.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ **tel que** $a.u + b.v + c.w = 0$
On a donc $\forall n \geqslant 0, a.2^n + b.3^n + c.4^n = 0 \quad (*)$
ici on pourrait prendre différentes valeurs de n et considérer un système; mais nous allons plutôt utiliser des limites...

- Divisons l'égalité $(*)$ par la quantité non nulle 4^n, cela donne
$$\forall n \geqslant 0, a.\left(\frac{1}{2}\right)^n + b.\left(\frac{3}{4}\right)^n + c = 0$$
En faisant tendre $n \to +\infty$, cela nous donne $\boxed{c = 0}$
- En reportant $c = 0$ dans $(*)$ et en la divisant par la quantité non nulle 3^n cela donne
$$\forall n \geqslant 0, a.\left(\frac{2}{3}\right)^n + b = 0$$
En faisant tendre $n \to +\infty$, cela nous donne $\boxed{b = 0}$
- En reportant dans $(*)$ cela devient $\forall n \geqslant 0, a.2^n = 0$
en prenant $n = 0$ on obtient $\boxed{a = 0}$

On a donc $a = b = c = 0$.
Conclusion: $\boxed{\text{On a montré que la famille } (u,v,w) \text{ est libre}}$

théorème 7:

Il y a équivalence entre :
i) la famille $\mathcal{F}$ est liée.
ii) l'un des vecteurs $\vec{x}$ de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille
iii) $\exists \vec{x} \in \mathcal{F}$,tel que $\vec{x} \in \text{vect}(\mathcal{F} - \{\vec{x}\})$ (simple écriture mathématique de ii))
Attention ! On ne peut pas choisir quel vecteur est combinaison linéaire des autres.

démonstration 3

Notons $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$

- $\boxed{i \Rightarrow ii)}$
On suppose la famille $\mathcal{F}$ liée.
C'est à dire qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0}$
On sait qu'il existe (au moins) un indice j pour lequel $\lambda_j \neq 0$, en isolant le terme d'indice j puis en divisant chaque membre de l'égalité par λ_j, cela donne $\vec{x}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{-\lambda_k}{\lambda_j} \vec{x}_k$
Le vecteur $\vec{x}_j$ est combinaison linéaire des autres vecteurs.
- $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$
On suppose qu'un vecteur est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, c'est à dire qu'il existe un indice j et des scalaires (λ_k) tels que $\vec{x}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \lambda_k \vec{x}_k$
Notons $\mu_j = -1$ et $\forall k \neq j, \mu_k = \lambda_k$,
on a alors $\sum_{k=1}^{n} \mu_k \vec{x}_k = \vec{0}$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \neq (0, \ldots, 0)$. ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est liée.

remarque 7 (*démontrée en exercice*)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs et $\vec{x}$ un vecteur.
***Si** $\{\vec{x}\} \cup \mathcal{F}$ est liée **et si** $\mathcal{F}$ est libre **alors** $\vec{x}$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$*
*autrement dit : **si** $\mathcal{F}$ est une famille libre **et si** $\vec{x} \notin \text{vect}(\mathcal{F})$ **alors** $\mathcal{F} \cup \{\vec{x}\}$ est une famille libre.*

théorème 8: propriétés des sous-familles, des sur-familles

i) Toute sous-famille d'une famille libre est libre .
ii) Toute sur-famille d'une famille liée est liée

théorème 9: des familles libres de référence très pratiques

1. Toute famille de polynômes de degrés distincts deux à deux et ne contenant pas le polynôme nul est libre.
   On dit encore *"toute famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés est libre"*
2. Toute famille de vecteurs non nuls de $\mathbb{K}^n$, telle que la matrice des coordonnées de ces vecteurs est échelonnée, est libre.

exemple 16: application du théorème précédent

1. la famille de polynômes $(X^5 + 4X^3 - 2X, X^3 + 12X + 4, 2X^2 - 9, -3X + 4{,}5)$ est libre
2. comme la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée,
   on peut affirmer que la famille de vecteurs $((1{,}0{,}0{,}0), (3{,}2{,}0{,}0), (2{,}0{,}4{,}0))$ est libre

1.6 Bases

définition 10:

Une <u>base de E</u> est une famille à la fois libre et génératrice de E.

théorème 10: cas d'une base de cardinal fini

Il y a équivalence entre :

i.) la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ est une base de E
ii.) $\forall \vec{x} \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . \vec{x}_i$ (<u>la décomposition existe et est unique</u>)

"$\mathcal{B}$ est une base de E ssi tout vecteur de E peut se s'écrire, de manière unique, comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$"

remarque 8

– *Les scalaires du théorème 10 $(\lambda_i)_{i \in I}$ s'appellent <u>les composantes</u> (ou <u>les coordonnées</u>) du vecteur $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$: <u>l'ordre des λ_i est important</u> !*

– *Dans le cas d'une base de cardinal fini, les coordonnées d'un vecteur sont alors un $n-$uplet de scalaires. On les note aussi bien horizontalement $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ que verticalement $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.*

exemple 17: base canonique de $\mathbb{K}^n$

Considérons les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ suivant :

$$\vec{e}_1=(1{,}0,\ldots,0),\vec{e}_2=(0{,}1{,}0,\ldots,0),\ldots\ldots,\vec{e}_k=\underbrace{(0,\ldots,0{,}1{,}0,\ldots,0)}_{\text{le 1 est au rang } k},\ldots\ldots,\vec{e}_n=(0,\ldots,0{,}1)$$

On appelle <u>base canonique de $\mathbb{K}^n$</u> la base $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n})$. Dans cette base, les composantes du vecteur $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ sont $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$! *(en effet,* $(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k$*)*

La base $(\vec{e}_n,\vec{e}_{n-1},\ldots,\vec{e}_2,\vec{e}_1)$ est une autre base de $\mathbb{K}^n$.

Dans cette base, les composantes du vecteur $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ sont $\begin{pmatrix} x_n\\ x_{n-1}\\ \vdots\\ x_2\\ x_1\end{pmatrix}$

exemple 18: base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$

Considérons les vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$ suivant :

$$P_0=P_0(X)=1, P_1=P_1(X)=X, P_2=P_2(X)=X^2,\ldots,P_k=P_k(X)=X^k,\ldots,P_n=P_n(X)=X^n$$

On appelle <u>base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$</u> la base $(P_0,P_1,P_2,\ldots,P_n)$.

Dans cette base, les composantes du polynôme $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_kX^k$ sont $\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$

exemple 19: base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

On rappelle que $E=\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant deux lignes et trois colonnes.

Considérons les matrices suivantes

$$M_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, M_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, M_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, M_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, M_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

La famille $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$ s'appelle <u>la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$</u>

Dans cette base, les composantes de la matrice $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$ sont $\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{13}\\a_{21}\\a_{22}\\a_{23}\end{pmatrix}$

2 Espaces vectoriels de dimension finie

définition 11: ev de dimension finie

On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie lorsque E admet une famille génératrice finie, (c'est à dire une famille génératrice de cardinal fini.)

théorème 11: théorème de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}-$ev différent de $\{\vec{0}\}$.
De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E

exemple 20:

On admet que $\mathcal{F} = ((1,2,0),(0,-1,1),(1,1,1),(2,4,-3))$ est une famille génératrice de $E = \mathbb{C}^3$

1. Est-ce une base de E?
2. Donner une base de E grâce au théoràme de la base extraite.

1. *card*$(\mathcal{F}) = 4$ *et* $\dim E = 3$, *donc* $\mathcal{F}$ *ne peut être une base de* E.
2. *D'apràs le théoràme de la base extraite, on sait qu'en retirant* ***judicieusement*** *un vecteur de* $\mathcal{F}$, *on obtiendra une base de* E. *On ne peut choisir ce vecteur au hasard: il faut retirer un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.*
   On remarque que $(1,1,1) = (1,2,0)+(0,-1,1)$, *on peut donc affirmer que* $((1,2,0),(0,-1,1),(2,4,-3))$ *est une base de* E.
   rem: ici, on n'aurait pu retirer n'importe lequel des 3 premiers vecteurs mais surtout pas le quatriàme!

théorème 12: théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}-$ev différent de $\{\vec{0}\}$.
Toute famille libre de E peut être complétée en une base.

théorème 13: un théorème plus puissant mais bon utilisé

Soit E un $\mathbb{K}-$ev différent de $\{\vec{0}\}$ et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E.
Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E, et de plus les vecteurs ajoutés peuvent être choisis dans $\mathcal{G}$

théorème 14:

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

i) E possède au moins une base
ii) toutes les bases de E ont le même cardinal, que l'on appelle la dimension de E.
iii) toute famille libre de E a un cardinal $\leqslant \dim E$
iv) toute famille libre de cardinal $\dim E$ est une base de E
v) toute famille génératrice de E a un cardinal $\geqslant \dim E$
vi) toute famille génératrice de cardinal $\dim E$ est une base de E

exemple 21: exemples fondamentaux...

- le $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}^n$ est de dimension n
- le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^n$ est de dimension n
- le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}^n$ est de dimension $2n$
- le $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$
- le $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie
- $\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n)$
- on convient que l'espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ est de dimension nulle.

exemple 22: d'autres exemples fondamentaux issus de l'analyse

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogàne d'ordre 2 à coefficients constants est un espace vectoriel de dimension 1
- L'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogàne d'ordre 2 à coefficients constants est un espace vectoriel de dimension 2

théorème 15: $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces vectoriels également!

1. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}-$ev de dimension un
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}-$ev de dimension un mais un $\mathbb{R}-$ev de dimension 2

En effet:

i) $\mathbb{R} = \{a.1 | a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(1)$ *et* $\mathbb{C} = \{z.1 | z \in \mathbb{C}\} = \mathrm{vect}(1)$

ii) $\mathbb{C} = \{a.1 + b.i | (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{vect}(1,i)$ *avec* $(1,i)$ *famille libre pour un* $\mathbb{R}-$*ev.*
(il n'existe pas deux réels $(a,b) \neq (0,0)$ *tels que* $a.1 + b.i = 0$*)*

méthode 7: comment montrer qu'une famille est une base d'un sev de dim. finie

D'après la définition, pour montrer qu'une famille est une base de E, il faut et il suffit de montrer que cette famille est libre génératrice de E.
Cependant, si l'on connait la dimension de E, il suffit de vérifier seulement que c'est une famille libre (et de citer le théorème 14 iv)) ou bien de vérifier seulement que c'est une famille génératrice(et de citer le théorème 14 vi))

exemple:

- *D'après le théorème 9, on peut affirmer que la famille* $\mathcal{F} = (X^3 - 3X, X^2 - 2X, X - 1, 1)$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}_3[X]$.
- *Or on sait que* $\mathbb{R}_3[X]$ *est un espace vectoriel de dimension 4*
- *Comme* $\mathrm{card}(\mathcal{F}) = 4$, *on peut affirmer que* $\mathcal{F}$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$

théorème 16:

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors :

i.) tout sev F de E est de dimension finie et l'on a $\dim F \leqslant \dim E$

ii.) $(F = E) \iff (F \subset E$ et $\dim F = \dim E)$

iii.) si F_1 et F_2 sont deux sev de E alors $\boxed{\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)}$
(la formule précédente est connue sous le nom de formule de Grassman)

iv.) si $F_1 \oplus F_2 = E$ alors $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$

les deux premiers points du théorème précédent peuvent s'exprimer encore de la manière suivante : tout sev F d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$, *avec égalité si et seulement si* $F = E$

théorème 17:
Soient F_1 et F_2 deux sev de E.
Il y a équivalence entre :

i.) F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E
ii.) $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$ et $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$
iii.) $F_1 + F_2 = E$ et $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$

méthode 8: comment montrer que deux sev sont supplémentaires(dim.finie)
On utilise souvent la caractérisation ii.) précédente,
c'est à dire que l'on montre que $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$ et que $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$
exemple:
Soit $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+z, x+z, -x+y-z) \end{array}}$
Montrer que $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont supplémentaires dans* E*, puis déterminer* *une base adaptée à cette décomposition.*

- Le théorème du rang appliqué à f donne directement $\dim\ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3$
- un calcul classique donne $\ker(f) = \operatorname{vect}((1,0,-1))$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}((1,1,-1),(2,0,-1))$.
  Montrons que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$
  Soit $\vec{x} \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$
  il existe donc $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{x} = \lambda_1(1,0,-1) = \lambda_2(1,1,-1) + \lambda_3(2,0,-1)$
  ce qui donne le système $\begin{cases} \lambda_1 & = \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 0 & = \lambda_2 \\ -\lambda_1 & = -\lambda_2 - \lambda_2 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
  et ceci prouve donc que $\vec{x} = \vec{0}$ (cqfd)
- par application du théorème précédent, on peut affirmer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.
- Une base adaptée à cette décomposition est la concaténation d'une base de $\ker(f)$ et d'une base de $\operatorname{Im} f$, c'est à dire ici par exemple $((1,0,-1),(1,1,-1),(2,0,-1))$
  rem: dans cette base la matrice de f sera du type $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$

théorème 18: concaténation de deux bases, version de première année
Soient F_1 et F_2 deux sev de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
Alors

$$\boxed{\text{la somme } F = F_1 + F_2 \text{ est directe } \textbf{ssi } (\mathcal{B}_1\ ,\ \mathcal{B}_2) \text{ est une base de } F}$$

$$\boxed{\text{em particulier,} \quad F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont supplémentaires } \textbf{ssi } (\mathcal{B}_1\ ,\ \mathcal{B}_2) \text{ est une base de } E}$$

Dans ce cas, on dit que la base $(\mathcal{B}_1\ ,\ \mathcal{B}_2)$ *est* *une base adaptée* *à la somme directe* $F_1 \oplus F_2$

théorème 19: complément au théorème 18
Soient F_1 et F_2 deux sev de familles génératrices respectives $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$
Alors :

$$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \text{ est une famille génératrice de } F_1 + F_2$$

méthode 9: comment montrer que deux sev sont supplémentaires(dim.finie)II

On vérifie que la concaténation d'une base de F_1 et d'une base de F_2 donne une base de E. (vérification possible à l'aide d'un déterminant par exemple)
avec le théorème précédent, on voit qu'une alternative consiste à montrer que la concaténation d'une base de $\ker f$ et d'une base de $\operatorname{Im} f$ est une base de $\mathbb{R}^3$, cette vérification s'effectuant rapidement grâce au déterminant par exemple!
ici, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

définition 12: rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ une famille de vecteurs de E.
On appelle rang de la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ la dimension de $\operatorname{vect} \mathcal{F} = \operatorname{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$
càd la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$
Le rang de la famille $\mathcal{F}$ est donc le nombre maximal de vecteurs de $\mathcal{F}$ qui forment une famille libre

méthode 10: rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$

Très souvent on utilisera l'algorithme de Gauss-Jordan pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$
exemple:
Déterminer en fonction de $a \in \mathbb{K}$ le rang de la famille de vecteurs suivants

$$\vec{x}_1 = (1, -1, 2, 1) \quad \vec{x}_2 = (1, 0, -1, 1) \quad \vec{x}_3 = (2, -1, 1, a)$$

On trouve que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ *est équivalente par ligne à la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On en déduit donc que le rang de la famille vaut $\begin{cases} 2 & si\ a = 2 \\ 3 & sinon \end{cases}$

rem: dès le départ on aurait pu dire que le rang valait deux ou trois ...

théorème 20: propriétés du rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ une famille finie de vecteurs de E.
On a:

1. $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \min(n, \dim(E))$
2. $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = card(\mathcal{F}) \iff \mathcal{F}$ est une famille libre
3. $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E) \iff \mathcal{F}$ est une famille génératrice de E

càd

1. *le rang d'une famille de vecteurs est toujours plus petit que le nombre de ses vecteurs .*
   le rang d'une famille de vecteurs est toujours plus petit que la dimension de l'espace auquel ils appartiennent.
2. *une famille est libre ssi son rang est égal à son nombre d'éléments*
3. *une famille est génératrice ssi son rang est égal à la dimension de l'espace*

démonstration 4

- *comme* $\mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}) \subset E$, *on a* $\dim(\mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n})) \leqslant \dim E$, *càd* $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \dim E$
- *comme la dimension d'un espace est toujours majoré par le cardinal d'une famille génératrice, on a* $\dim(\mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n})) \leqslant n$, *càd* $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant n$
- *comme* $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n})$ *est une famille génératrice de* $\mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n})$, *on a les équivalences suivantes:*

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \text{ famille libre} &\iff \mathcal{F} \text{ base de } \mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n})\\ &\iff \mathcal{F} \text{ famille génératrice et } card(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}))\\ &\iff card(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}))\end{aligned}$$

- *comme* $\mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}) \subset E$, *on a* $\mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}) = E$ *ssi* $\dim(\mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n})) = \dim E$, *c'est à dire ssi* $rg(\mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n})) = \dim E$

méthode 11: détermination du rang d'une famille de polynômes ou autres

On peut aussi utiliser la méthode du pivot de Gauss-Jordan: on commence par écrire la matrice de la famille de vecteurs dans une base (par exemple la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ pour les polynômes) puis on applique le pivot.

Exemple:

Déterminer en fonction de $a \in \mathbb{K}$ *le rang de la famille de polynômes suivants:*

$$P_1 = 2X^3 - X^2 + X + a \quad P_2 = X^3 - X^2 + 2X + 1 \quad P_3 = X^3 - X + 1$$

La matrice de la famille de vecteurs dans la base $(1,X,X^2,X^3)$ *est* $\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ *Mais on ne va pas utiliser cette matrice et être plus malin que cela !*

Comme le rang d'une famille ne dépend de l'ordre des vecteurs dans la famille, on va plutôt écrire la matrice de la famille de vecteurs (P_2,P_3,P_1) *dans la base* $(X^3,X^2,X,1)$

On obtient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$ *C'est la matrice de la méthode précédente (!): on peut donc directement conclure:*

$$\boxed{\mathrm{rg}(\{P_1,P_2,P_3\}) = \begin{cases} 3 & \text{si } a \neq 2\\ 2 & \text{si } a = 2\end{cases}}$$

remarque: on vient ici d'utiliser l'un des plus beaux objets d'algèbre linéaire: une même matrice peut, suivant la base que l'on considère, être "associée" à des éléments de $\mathbb{K}^n$ *ou à des polynômes ou à des fonctions ou à des suites ou à .... Et donc une fois un résultat établi pour la matrice, on aura des conclusions déclinées dans des espaces très différents!*

Par exemple, la même matrice pourra être utilisée pour étudier la rang de la famille de matrices suivante

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\right)$$