Révisions de 1ère année: Matrices

Serge Lemarquis

Table des matières

1 Définitions **2**
1.1 Notion de matrice 2
1.2 Matrice d'une famille de vecteurs 3
1.3 Matrice d'une application linéaire, d'un endomorphisme 4

2 Calcul matriciel **5**
2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ 5
2.2 Produit de deux matrices 7
2.3 Transposition 9
2.4 Matrices diagonales et triangulaires 12
2.5 Matrices inversibles 13

3 Noyau, image et rang d'une matrice **16**
3.1 Application canoniquement associée à une matrice 16
3.2 Propriétés du rang 18
3.3 Caractérisations des matrices inversibles et calcul de l'inverse 18

4 Formules de changement de bases **20**

5 Nouveauté de spé : Matrices semblables **23**

$\mathbb{K}$ désignera le corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Définitions

1.1 Notion de matrice

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

- On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ toute famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$. On utilise deux indices pour décrire une matrice.$(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$
- On représente une matrice en tableau $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ où le coefficient a_{ij} se trouve à l'intersection de la ligne numéro i et de la colonne numéro j.
- On désigne une matrice à l'aide d'une lettre généralement majuscule : par exemple $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$
- On appelle i-ème vecteur ligne de la matrice A le vecteur de $\mathbb{K}^p$ suivant $L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip}) \in \mathbb{K}^p$.
- On appelle j-ème vecteur colonne de la matrice A le vecteur de $\mathbb{K}^n$ suivant $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.
- Ainsi, il existe n vecteurs lignes et p vecteurs colonnes pour la matrice A précédente

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \\ L_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

- Une matrice qui possède une seule ligne est dite matrice ligne ou uniligne
- Une matrice qui possède une seule colonne est dite matrice colonne ou unicolonne
- Une matrice à une ligne et une colonne est dite matrice scalaire
- On appelle matrice carrée d'ordre n toute matrice à n lignes et n colonnes
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnesà coefficients dans $\mathbb{K}$
- On préfère noter $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

type de matrice carrée	définition	représentation
matrice diagonale	$\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$
matrice triangulaire supérieure	$\forall i > j \quad a_{ij} = 0$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$
matrice triangulaire inférieure	$\forall i < j \quad a_{ij} = 0$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- On identifie toujours $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$
  exemple: la matrice scalaire (3) *est identifié au réel* 3
- On identifie souvent $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$... mais attention au contexte!!!
  exemple: la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *est identifié au vecteur* $(1,3) \in \mathbb{R}^2$

1.2 Matrice d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension n et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E.

définition 1:

On appelle matrice de la famille de vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice dont la j-ème colonne est formée des composantes du vecteur $\overrightarrow{u_j}$ dans la base $\mathcal{B}$. On la note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall j \in [\![1,p]\!], \overrightarrow{u_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.\overrightarrow{e_i}$$

exemple 1: avec des polynômes

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On note $\mathcal{B} = (1,X,X^2)$ la base canonique de E.
On considère la famille de vecteurs suivante $\mathcal{F} = (X^2 + 2X + 3, X^2 - 1, 3X + 5)$

- La matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Dans la base $(X^2, X+1, 1)$ la matrice de $\mathcal{F}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

exemple 2: avec des vecteurs de $\mathbb{R}^3$... et d'autres espaces aussi

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de E.
On considère la famille de vecteurs suivante $\mathcal{F} = ((1,1,0),(2,1,0),(1,1,1),(1,2,3)$.

- La matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- Si on écrit cette fois la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ on trouve alors $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- La matrice précédente est aussi la matrice de la famille de vecteurs $(X^2+X, 2X^2+X, 1, -2X^2-X+3)$ dans la base $(X^2, X, 1)$.
(L'espace vectoriel E étant $\mathbb{R}_2[X]$ cette fois-ci.)
- De la remarque ci-dessus, on retient qu'une même matrice peut être associée à différentes familles de vecteurs: tout dépend de la base dans laquelle on écrit la matrice.

méthode 1: Ecrire la matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée

On cherche les composantes de chaque vecteur dans la base donnée, puis on écrit ces composantes, dans l'ordre, en colonne

1.3 Matrice d'une application linéaire, d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment associer matrices et applications linéaires. Ceci est très important, car on fera souvent le va-et-vient entre ces deux notions dans de nombreux raisonnements.
Soient :

- E une $\mathbb{K}-$ ev de dimension p dont une base est $\mathcal{B}=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p})$
- F une $\mathbb{K}-$ ev de dimension n dont une base est $\mathcal{C}=(\overrightarrow{f_1},\dots,\overrightarrow{f_n})$

définition 2:

Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$. On appelle matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la matrice de la famille de vecteurs $(u(\overrightarrow{e_1}),\dots,u(\overrightarrow{e_p}))$ dans la base $\mathcal{C}$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B}))=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1p}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{np}\end{pmatrix}\ avec\,\forall j\in[\![1,p]\!],u(\overrightarrow{e_j})=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}.\overrightarrow{f_i}$$

méthode 2: Ecrire la matrice d'une application linéaire

On calcule l'image de chaque vecteur de la base de l'ensemble de départ (on dit qu'on calcule l'image de la base) et on exprime chacune de ces images dans la base de l'ensemble d'arrivée. Puis on place ces composantes en colonne
exemple:

- *On considére l'application suivante* $\boxed{\begin{array}{rcl}u:\mathbb{R}_3[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}_2[X]\\P&\longmapsto&2P'-(X+1)P''\end{array}}$
- *On munit* $\mathbb{R}_3[X]$ *de la base* $\mathcal{B}=(1,X,X^2,X^3)$*, et* $\mathbb{R}_2[X]$ *de la base* $\mathcal{C}=(X^2,X,1)$.
- *On a* $u(1)=0,u(X)=2,u(X^2)=-2X-2$ *et* $u(X^3)=-6X$
- *On trouve alors facilement que* $\boxed{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&2&-6\\0&2&-2&0\end{pmatrix}}$

exemple 3:

- On considère l'application $\boxed{\begin{array}{rcl}u:\ \mathbb{R}^3&\longrightarrow&\mathbb{R}_2[X]\\(a,b,c)&\longmapsto&(a-c)X^2+(a+5b)X+(b+2c)\end{array}}$
- On munit $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{B}=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $\mathcal{C}=(1,X,X^2)$
- On trouve alors que $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&5&0\\1&0&-1\end{pmatrix}}$

définition 3: cas particulier des endomorphismes(très important)

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. On appelle matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de la famille de vecteurs $(u(\overrightarrow{e_1}),\dots,u(\overrightarrow{e_p}))$ dans la base $\mathcal{B}$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1p}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{p1}&a_{p2}&\dots&a_{pp}\end{pmatrix}\ avec\,\forall j\in[\![1,p]\!],u(\overrightarrow{e_j})=\sum_{i=1}^{p}a_{ij}.\overrightarrow{e_i}$$

2 Calcul matriciel

2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

définition 4:

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On définit les matrices $A+B$ et $\lambda.A$ comme éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de la manière suivante :

$$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \quad et \quad \lambda.A = (\lambda.a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

définition 5: matrices élémentaires, base canonique

On appelle matrices élémentaires les $n\times p$ matrices $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ définies de la manière suivante : E_{ij} est la matrice qui ne contient que des zéros sauf à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne où se trouve un coefficient égal à 1 (un).

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ces $n\times p$ matrices élémentaires constituent la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

exemple 4:

- La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est $\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{E_{22}}\right)$
- Dans cette base, la matrice $\begin{pmatrix}1&3\\-2&5\end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1,3,-2,5)$ car on a

$$\begin{pmatrix}1&3\\-2&5\end{pmatrix} = 1.E_{11}+3.E_{12}-2.E_{21}+5.E_{22}$$

D'une manière plus générale:

- Pour $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a $\boxed{A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}E_{i,j}}$
- dans le cas où l'on se trouve dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\sum_{i=1}^{n}E_{ii}=I_n \text{ matrice unité et } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E_{ij} = \begin{pmatrix}1&\dots&1\\\vdots&\ddots&\vdots\\1&\dots&1\end{pmatrix} = \text{"matrice Attila \dots"}$$

théorème 1:

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}-$ev de dimension $n\times p$,
dont la base canonique est constituée des matrices élémentaires.

remarque: en particulier $\dim\mathcal{M}_n(\mathbb{K})=n^2$

théorème 2:

Soit E un espace-vectoriel de dim p et de base $\mathcal{B}$ et,
F un espace-vectoriel de dim n et de base $\mathcal{C}$.

L'application $\boxed{\begin{array}{rcl}\mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\end{array} \text{ est un isomorphisme.}}$

En particulier $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda u+v)=\lambda\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)+\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v)$

Ceci signifie en particulier, que si l'on se fixe une base de E et une base de F, à toute application linéaire de $E \to F$ correspond une et une seule matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et reciproquement.

théorème 3: le théorème précédent appliqué aux endomorphismes

Soit E un espace-vectoriel de dim n et de base $\mathcal{B}$

L'application $\boxed{\begin{array}{rcl}\mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\end{array} \text{ est un isomorphisme.}}$

Encore plus particulièrement, ceci signifie que si l'on se fixe une base de E, à tout endomorphisme de E correspond une et une seule matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et réciproquement

exemple 5:

On note $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

Donner l'expression de f dans les cas suivants:

1. $E=\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1=(0,3)$ et $\vec{e}_2=(1,0)$
   - *D'après la matrice, on a* $f(\vec{e}_1)=\vec{e}_1+3\vec{e}_2$ et $f(\vec{e}_2)=\vec{e}_2$
   - *On a pour tout* $(x,y)\in\mathbb{R}^2, (x,y)=x.\vec{e}_2+\frac{y}{3}.\vec{e}_1$
   - *Ainsi* $f(x,y)=f(x.\vec{e}_2+\frac{y}{3}.\vec{e}_1)=x.f(\vec{e}_2)+\frac{y}{3}f(\vec{e}_1)=x.\vec{e}_2+\frac{y}{3}(\vec{e}_1+3\vec{e}_2)=x.(1,0)+\frac{y}{3}((0,3)+3.(1,0)$

     L'endomorphisme f alors associé à A est $\boxed{\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,y)\end{array}}$
2. $E=\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1=(1,0)$ et $\vec{e}_2=(0,1)$
   - *D'après la matrice, on a* $f(\vec{e}_1)=\vec{e}_1+3\vec{e}_2$ et $f(\vec{e}_2)=\vec{e}_2$
   - *On a pour tout* $(x,y)\in\mathbb{R}^2, (x,y)=x.\vec{e}_1+y.\vec{e}_2$
   - *Ainsi* $f(x,y)=f(x.\vec{e}_1+y.\vec{e}_2)=x.f(\vec{e}_1)+y.f(\vec{e}_2)=x.(\vec{e}_1+3\vec{e}_2)+y.\vec{e}_2=x.((1,0)+3.(0,1))+y.(0,1)$

     L'endomorphisme f alors associé à A est $\boxed{\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x,3x+y)\end{array}}$
3. $E=\mathbb{R}_1[X]$ et $\mathcal{B}=(X,1)$
   - *D'après la matrice, on a* $f(X)=1.X+3.1=X+3$ et $f(1)=0.X+1.1=1$
   - *Ainsi* $f(a.X+b.1)=a.f(X)+b.f(1)=a.(X+3)+b.1=a.X+(3a+b).1$

     L'endomorphisme f alors associé à A est $\boxed{\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ & aX+b & \longmapsto & aX+3a+b\end{array}}$

théorème 4: $\dim\mathcal{L}(E,F)=\dim E\times\dim F$

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

Alors l'espace - vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et l'on a $\boxed{\dim\mathcal{L}(E,F)=\dim E\times\dim F}$

2.2 Produit de deux matrices

définition 6: formule du produit matriciel(très important)

Soient $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

On définit la matrice produit AB comme élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ de la manière suivante :

$$AB=(c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}\quad\text{avec}\quad\boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}}$$

proposition 1

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On peut écrire A avec ses colonnes : $A=(C_1|\dots|C_p)$
Si $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ alors $AX=\sum_{j=1}^{p}x_jC_j$.
("Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A")

exemple 6:

- $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+3z\\4x+5y+6z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+4y&2x+5y&3x+6y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4&5&6\end{pmatrix}$

proposition 2

Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soit $B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors on peut écrire B avec ses colonnes : $B=(C_1,\dots,C_q)$
Alors: $\boxed{AB=(AC_1,\dots,AC_q)}$
("La j-ème colonne de AB est le produit de A par la j-ième colonne de B")

exemple 7:

On a $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&0\end{pmatrix}$

et l'on peut remarquer que $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

exemple 8: produit de deux matrices élémentaires

On a la formule $E_{ij}.E_{kl}=\delta_{jk}.E_{il}=\begin{cases}E_{il}&\text{si } j=k\\0&\text{sinon}\end{cases}$ (δ_{jk} *est le symbole de Kronecker)*

Il faut savoir la redémontrer à l'aide de la formule du produit matriciel

remarque 1

1. *pour faire une multiplication, les formats doivent être adaptés :*

   soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

   On peut calculer $AB = \begin{pmatrix} 12 & 21 & -2 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ *mais, on ne peut pas calculer* BA
2. *Le produit n'est pas commutatif :*

   soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *alors*

   $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ *et* $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $AB \neq BA$
3. *On remarque ci-dessus qu'il existe des matrices non nulles dont le produit est nul ...*

$$\boxed{\textit{Attention avec les matrices: } AB = 0 \not\Longrightarrow (A = 0 \textit{ ou } B = 0)}$$

proposition 3 (*régles de calculs usuelles*)

Sous réserve que les produits existent on a :

1. *Le produit de matrices est associatif :* $(AB)C = A(BC)$
2. *distributivité :* $A(b.B + c.C) = b.AB + c.AC, \quad (b.B + c.C)A = b.BA + c.CA$

   On peut donc parler de bilinéarité du produit matriciel !
3. *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *alors* $A.I_p = A$ *et* $I_n.A = A$

théorème 5: Matrice d'une composée d'applications linéaires

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ leur base respective.
Soient $u \in \mathcal{L}(F,G)$ et $v \in \mathcal{L}(E,F)$.
On a alors l'égalité matricielle suivante : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v)$

théorème 6: Matrice d'une composée d'endomorphisme

Soit E un espacee vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes de E
On a alors l'égalité matricielle suivante :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \ \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^n) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^n}$$

ces deux dernières formules sont fondamentales pour notre programme

remarque 2

En résumé, on a vu que, une base $\mathcal{B}$ étant fixée :

- *à toute matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est associée un unique endomorphisme de* E*, et réciproquement*
- $Mat_{\mathcal{B}}(u + v) = Mat_{\mathcal{B}}(u) + Mat_{\mathcal{B}}(v)$
- $Mat_{\mathcal{B}}(\lambda u) = \lambda Mat_{\mathcal{B}}(u)$
- $Mat_{\mathcal{B}}(u \circ v) = Mat_{\mathcal{B}}(u).Mat_{\mathcal{B}}(v)$

théorème 7: c'est ce théorème qui établit la correspondance entre vecteurs-applications et matrices

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On a les équivalences

$$\boxed{\vec{y} = u(\vec{x}) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{y}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\vec{x})) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{y}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u).\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x})}$$

remarque 3 (*correspondances entre monde vecteurs/applications et monde matriciel*)

Une $\mathcal{B}$ de E est supposée donnée, dans laquelle on exprime toutes les coordonnées.

$\vec{x} \in E$	$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$\vec{y} \in E$	$Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$u \in \mathcal{L}(E)$	$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$v \in \mathcal{L}(E)$	$B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$u(\vec{x}) \in E$	$AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$\vec{x} + \lambda\vec{y} \in E$	$X + \lambda Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$id_E \in \mathcal{L}(E)$	$I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

.

$u + v \in \mathcal{L}(E)$	$A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$u^2 \in \mathcal{L}(E)$	$A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$u \circ v \in \mathcal{L}(E)$	$AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$v \circ u \in \mathcal{L}(E)$	$BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
u^{-1} (*si* $u \in GL(E)$)	A^{-1} (*si* $A \in GL_n(\mathbb{K})$)
$(u^2 - 3v)(\vec{x}) + 3\vec{y}$	$(A^2 - 3B)X + 3Y$

théorème 8:

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, stable par le produit interne* $\times$.
(c'est à dire que la combinaison linéaire de deux matrices carrées d'ordre n est encore une matrice carrée d'ordre n, et que le produit de deux matrices carrées d'ordre n est encore une matrice carrée d'ordre n)

remarque 4 (*des formules classiques avec les matrices carrées*)

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n qui commutent, (c'est-à-dire que $AB = BA$).
Alors :

1. *toute puissance de A commute avec toute puissance de B.*
2. $\forall p \in \mathbb{N}, (A+B)^p = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k}.A^k.B^{p-k}$ *(avec comme convention $A^0 = I_n$)*
3. $\forall p \in \mathbb{N}, A^p - B^p = (A - B).(\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k.B^{p-k-1})$

2.3 Transposition

définition 7:

Soit A une matrice de type (n,p).
La transposée de A , notée ${}^tA$ ou A^T, est la matrice de type (p,n) définie par :

$${}^tA = A^T = (a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \text{ avec } a'_{ij} = a_{ji}$$

les lignes de la matrice ${}^tA$ sont les colonnes de A , et inversement.

exemple 9:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ et ${}^tA = A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

théorème 9: les formules avec la transposée

Soient A et B deux matrices et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$.

1. $\boxed{{}^t({}^tA) = A}$ $\qquad (A^T)^T = A$
2. $\boxed{{}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda{}^tA + \mu{}^tB}$ $\qquad (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$
3. $\boxed{{}^t(AB) = {}^tB.{}^tA}$ $\qquad (AB)^T = B^T.A^T$

Il existe une autre formule également avec la transposée de l'inverse(voir plus loin)

définition 8: matrice symétrique, antisymétrique

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

1. On dit que la matrice A est symétrique lorsque ${}^tA = A$ $\qquad (A^T = A)$
2. On dit que la matrice A est antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$ $\qquad (A^T = -A)$

Ce qui se traduit au niveau des coefficients par :

- $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *est symétrique ssi* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = a_{ji}$
- $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *est antisymétrique ssi* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = -a_{ji}$.
  (On a donc en particulier pour une matrice antisymétrique $\forall i \in [\![1,n]\!], a_{ii} = 0\dots$ *)*

exemple 10:

- Les matrices symétriques d'ordre 2 sont les matrices du type $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ quelconque
  On note $\mathcal{S}_2(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 2.
  On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2(\mathbb{K}) &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\} \\
&= \{a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\} \\
&= \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \\
&= \mathrm{vect}(E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22})
\end{aligned}$$

- Les matrices antisymétriques d'ordre 3 sont les matrices du type $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ quelconque
  On note $\mathcal{A}_3(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre 3.
  On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3(\mathbb{K}) &= \{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\} \\
&= \{a.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\} \\
&= \mathrm{vect}(E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32})
\end{aligned}$$

remarque 5 (***Quelques résultats Hors-Programme... mais qu'il est préférable de connaitre...***)

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
A noter que les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas stables pour le produit interne!

théorème 10: Propriétés de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

1. *$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*
2. *$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*
3. *$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$*
4. *une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ij} - E_{ji})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$*
5. *une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ij} + E_{ji})_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cup (E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$*

exemple 11: dans le cas où $n = 2$

- *On a vu que $\mathcal{S}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{vect}(E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22})$*
- *Nous allons montrer que $(E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{K})$ en justifiant que c'est une famille libre.*

  Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ tel que $a.E_{11} + b.(E_{12} + E_{21}) + c.E_{22} = 0$
  On a ainsi
  $$a.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 0$$
  c'est à dire
  $$\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
  Or une matrice est la matrice nulle ssi tous ses coefficients sont nuls,
  on en déduit que $a = b = c = 0$

  La famille $(E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22})$ est ainsi une famille libre et génératrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{K})$, c'en est donc une base!
  On en déduit que $\dim \mathcal{S}_2(\mathbb{K}) = 3$
- *On montrerait que $\mathcal{A}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{vect}(E_{12} - E_{21})$*
- *Pour justifier que $\mathcal{S}_2(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_2(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, nous allons montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*
  Soit $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice donnée
  Notons $S = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix}0 & \delta\\ -\delta & 0\end{pmatrix}$.
  On a les équivalences suivantes
  $$M = S + A \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & \delta\\ -\delta & 0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a &= \alpha\\ b &= \beta + \delta\\ c &= \beta - \delta\\ d &= \gamma \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha &= a\\ \beta &= \dfrac{b+c}{2}\\ \delta &= \dfrac{b-c}{2}\\ \gamma &= d \end{cases}$$
  ce qui prouve l'existence et l'unicité de la décomposition! cqfd

2.4 Matrices diagonales et triangulaires

Les notations suivantes ne sont pas officielles:

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.
- $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n.
- $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices triangulaires inférieures d'ordre n.

théorème 11:

1. $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}),\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont des un sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stables par multiplication interne $\times$
2. $\forall(D_1,D_2)\in\mathcal{D}_n(\mathbb{K})^2, D_1.D_2=D_2.D_1$ ("deux matrices diagonales commutent")
3. Pour tout $p\in\mathbb{N}$ on a $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}^p=\begin{pmatrix}\lambda_1^p & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n^p\end{pmatrix}$

remarque 6

On peut noter Diag$(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$. *On a alors les propriétés suivantes :*

1. *Diag*$(\lambda_1,\dots,\lambda_n)+$ *Diag*$(\mu_1,\dots,\mu_n)=$ *Diag*$(\lambda_1+\mu_1,\dots,\lambda_n+\mu_n)$
2. *Diag*$(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.*Diag*$(\mu_1,\dots,\mu_n)=$ *Diag*$(\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n)$

exemple 12:

On s'intéresse à $\mathcal{T}_3(\mathbb{K})=\{\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix}|(a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{K}^6\}$

- En écrivant $\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix}=aE_{11}+bE_{12}+cE_{13}+dE_{22}+eE_{23}+fE_{33}$, on remarque que

  $$\boxed{\mathcal{T}_3(\mathbb{K})=\{aE_{11}+bE_{12}+cE_{13}+dE_{22}+eE_{23}+fE_{33}|(a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{K}^6\}}$$

  $\mathcal{T}_3(\mathbb{K})$ est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices $E_{11},E_{12},E_{13},E_{22},E_{23},E_{33}$.
- On vient de prouver que

  $$\mathcal{T}_3(\mathbb{K})=\mathrm{vect}(E_{11},E_{12},E_{13},E_{22},E_{23},E_{33})=\mathrm{vect}((E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3})$$

  c'est à dire que $(E_{11},E_{12},E_{13},E_{22},E_{23},E_{33})$ est une famille génératrice de $\mathcal{T}_3(\mathbb{K})$.
- Cette famille est aussi une famille libre car c'est une sous-famille d'une famille libre, à savoir une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- Conclusion: $\boxed{(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3}\text{ est une base de }\mathcal{T}_3(\mathbb{K})\text{, et }\dim\mathcal{T}_3(\mathbb{K})=6}$

théorème 12: dimension de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}),\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ (Hors-Programme. . . mais. . .)

1. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n
2. une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$
3. $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et une base de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est $(E_{ij})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$
4. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et une base de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est $(E_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$

2.5 Matrices inversibles

définition 9: matrice inversible

On dit que la matrice carrée A d'ordre n est inversible lorsque $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA = I_n$.
La matrice B est alors appelée l'inverse de A , et on la note A^{-1}.
rem: on note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n.

théorème 13: propriétés de l'inverse

- Si A est inversible alors son inverse est unique.
- Si A est inversible alors A^{-1} et inversible, et l'on a $(A^{-1})^{-1} = A$
- Le produit de deux matrices inversibles est une matrice inversible et l'on a $\boxed{\forall (A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

Mais attention! La somme de deux matrices inversibles n'est pas forcément une matrice inversible!

remarque 7 (***très important dans la pratique***)

Soient A, B et C trois matrices.

- *si $A = B$ alors $AC = BC$ et $CA = CB$ (trivial)*
- *si $AC = BC$ alors on n'a pas forcément $A = B$*
- *si $AC = BC$ et C est inversible alors on a forcément $A = B$*

On retiendra que si C est une matrice inversible, on a les équivalences

$$AC = BC \iff A = B \qquad\qquad CA = CB \iff A = B$$

multiplier les deux membres d'une égalité par une matrice inversible donne une égalité équivalente

théorème 14: lien entre matrice inversible et application linéaire bijective

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de même dimension finie, et de base respective $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$
Alors on a l'équivalence

$$\boxed{u \text{ est bijective (=isomorphisme)} \iff A \text{ est inversible}}$$

Et dans ce cas, on a : $\boxed{A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1})}$

théorème 15: lien entre matrice inversible et automorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$
Alors on a l'équivalence

$$\boxed{u \text{ est bijective (=automorphisme de } E) \iff A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est inversible}}$$

et dans ce cas $\boxed{A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1})}$

exemple 13:

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ deux bases de $\mathbb{R}^3$, et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$, et on suppose que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$
   (b) Que vaut $A_1^2 - 3A_1 + 2I_3$?
2. (a) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_3
   (b) Qu'en déduire sur u? sur A_1?

Solution:

1. (a) *On a* $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *donc*

$$A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

   (b) *On a*

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0$$

   c'est à dire

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2 - 3u + 2id) = 0_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

   ce qui nous permet d'affirmer que

$$u^2 - 3u + 2id = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}\text{(endomorphisme nul)}$$

   Dans la base $\mathcal{B}_1$, l'endomorphisme $u^2 - 3u + 2id$ est associé à la matrice $A_1^2 - 3A_1 + 2I_3$. On a donc aussi (aucun calcul nécessaire!)

$$A_1^2 - 3A_1 + 2I_3 = 0_3$$

2. (a) *On remarque que*

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3 \iff 3A - A^2 = 2I_3 \iff \frac{3}{2}A - \frac{1}{2}A^2 = I_3$$

   On peut donc écrire

$$\left(\frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A\right).A = A.\left(\frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A\right) = I_3$$

   Ce qui permet d'affirmer que $\boxed{A \text{ est inversible et que } A^{-1} = \frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A}$

   (b) *Comme A est une matrice associée à u, on peut affirmer que*

$$\boxed{u \text{ est bijectif}}(=\text{automorphisme de } \mathbb{R}^3) \text{ et que } \boxed{u^{-1} = \tfrac{3}{2}.id_{\mathbb{R}^3} - \tfrac{1}{2}u}$$

Comme A_1 est une matrice associée à u et que u est bijectif, on peut dire que $\boxed{A_1 \text{ est inversible}}$.

Si on traduit matriciellement l'égalité précédente dans la base $\mathcal{B}_1$ cela donne

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}\left(\frac{3}{2}.id_{\mathbb{R}^3} - \frac{1}{2}u\right) = \frac{3}{2}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(id_{\mathbb{R}^3}) - \frac{1}{2}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$$

C'est à dire $\boxed{A_1^{-1} = \frac{3}{2}I_2 - \frac{1}{2}A_1}$

exemple 14:

Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{B}$ une base de E

et u l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- L'existence et l'unicité de u sont données par le théorème 3.
- Une première idée pour justifier que u est bijective est de vérifier que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice inversible, par exemple en calculant son déterminant.
  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ *donc on en déduit que u est bijective*
- Ici, on remarque que $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(id_E)$
- On peut donc affirmer que $u^2 = id_E$. On a prouvé que u est bijective et que son inverse est… u. (en fait on a prouvé que u est une *symétrie vectorielle*)

théorème 16: important dans la pratique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i) S' il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ alors A est inversible et l'on a $A^{-1} = B$.

ii) S' il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$ alors A est inversible et l'on a $A^{-1} = B$.

On dit que si A est inversible à droite ou à gauche alors A est inversible.

exemple 15:

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

- Un simple calcul matriciel donne $AB = I_2$.
- Grâce au théorème ci-dessus, on peut affirmer que A est inversible et que $A^{-1} = B$. Il *n'y a pas besoin de vérifier la deuxième égalité $BA = I_2$*
- On peut évidemment aussi affirmer que B est inversible et que son inverse est A
- Le résultat du théorème est vraiment particulier à l'égalité $AB = I_n$ ou $BA = I_n$:
  si $AB = I_n$ on peut affirmer que $BA = I_n$ … (alors qu'en général on sait que le produit matriciel n'est pas commutatif, et en particulier on peut avoir $AB = 0$ sans que $BA = 0$)

théorème 17: lien entre matrice inversible et famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E.

On considère la famille de n vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$.

Alors : $\boxed{(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}) \text{ est une base de } E \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}) \text{ est une matrice inversible.}}$

exemple 16:

Sachant que la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible, on peut en déduire que:

- la famille de vecteurs ((4,3,0),(1,1,1),(0,2,4)) est libre.
  En effet $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3))$ avec $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ =base canonique de $\mathbb{R}^3$)

- la famille de polynôme $(3X + 4,X^2 + X + 1,4X^2 + 2X)$ est libre.
  En effet, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1,P_2,P_3))$ avec $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1,X,X^2))$

théorème 18:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence :

A est inversible $\Longleftrightarrow {}^tA$ est inversible. Et dans ce cas $\boxed{{}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}}$ soit $\boxed{(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}}$

théorème 19: inversibilité des matrices triangulaires ou diagonales

Une matrice diagonale [resp. triangulaire] est inversible ssi aucun des éléments diagonaux n'est nul. Et dans ce cas, l'inverse de la matrice est diagonale [resp. triangulaire].

En particulier, on a $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$ *lorsque* $\prod_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 0$

3 Noyau, image et rang d'une matrice

3.1 Application canoniquement associée à une matrice

définition 10: application linéaire canoniquement associée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

L'application linéaire canoniquement associée à A est l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ qui a pour matrice A lorsque l'on munit $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de leur respective base canonique.

Autrement dit, c'est l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array}}$

Dans cette définition, on identifie les vecteurs de $\mathbb{K}^p$ *et* $\mathbb{K}^n$ *aux matrices unicolonnes*

rem: on a déjà vu qu'à une matrice donnée on pouvait associer une infinité d'applications linéaires, il y en a une que l'on distingue c'est l'endomorphisme canoniquement associé.

définition 11: endomorphisme canoniquement associée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'endomorphisme canoniquement associé à A est l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ qui a pour matrice A lorsque l'on munit $\mathbb{K}^n$ de sa base canonique.

Autrement dit, c'est l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array}}$

Dans cette définition, on identifie les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ *aux matrices unicolonnes*

exemple 17:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminons l'endomorphisme canoniquement associé à A

Comme A est une matrice carrée d'ordre 2, l'endomorphisme canoniquement associé à A est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, à savoir $\boxed{\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix} \end{array}}$

définition 12: image, noyau, rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. On appelle image[resp. noyau] de la matrice A , et on note $\mathrm{Im}(A)$ [resp. $\ker(A)$], l'image [resp. le noyau] de son appli.lin.cano.associé.
2. On appelle rang de la matrice A, et on note $\mathrm{rg}(A)$, le rang de la famille de ses vecteurs colonnes

remarque 8

Très souvent, lorsque l'on parlera du noyau ou de l'image d'une matrice, on préférera noter les éléments de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ à l'aide de matrices unicolonnes: on utilisera alors pleinement l'identification entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$. On a alors les équivalences suivantes à retenir

$$\boxed{X \in \ker A \Longleftrightarrow AX = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{Y \in \mathrm{Im}(A) \Longleftrightarrow \exists X \in \mathbb{K}^n, Y = AX}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), Y = AX\} = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = \{x_1.C_1 + \cdots + x_p.C_p \mid (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p\} = \mathrm{vect}(C_1, \ldots, C_p)}$$

On retiendra que Im A est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A.

exemple 18:

Déterminer le noyau, l'ensemble image et le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{Im}(A) = \{A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$
- *pour déterminer* $\ker(A)$ *on résout* $AX = 0$, *on a*

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y & = 0 \\ 2x + 4y & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x + 2y = 0$$

Ainsi $\ker(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = -2y\} = \{\begin{pmatrix} y \\ -2y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix})$

- *On constate que* $\dim\ker(A) = 1$ *et que* $\mathrm{rg}(A) = 1$
- *remarque:*
  le théorème du rang appliqué à la matrice A donnait déjà $\dim\ker(A) + \mathrm{rg}(A) = \dim\mathbb{R}^2 = 2$ *sans faire aucun calcul!*

3.2 Propriétés du rang

théorème 20: lien avec le rang d'une famille de vecteurs.

Soit E une $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$ une famille de p vecteurs de E.
Alors : pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})\right)$
Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de n'importe quelle matrice associée à cette famille

théorème 21:

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

i) $\mathrm{rg}(A) + \dim(\ker(A)) = p$
ii) $\mathrm{rg}\, A \leqslant \min(n,p)$
iii) $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$
iv) $\mathrm{rg}\, {}^t A = \mathrm{rg}\, A^T = \mathrm{rg}\, A$

"Le rang d'une matrice est inférieur à son nombre de lignes et à son nombre de colonnes."
"Multiplier deux matrices ne peut augmenter le rang."

théorème 22:

- Le rang d'une matrice est inchangée par multiplication par une matrice carrée inversible. $(\forall P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), \forall Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, AP = \mathrm{rg}\, QA)$
- Le rang d'une matrice est inchangée par multiplication par un scalaire non nul. $(\forall \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \mathrm{rg}(\lambda A) = \mathrm{rg}(A))$
- Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes sont de même rang
- Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
- Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes.
- Le rang d'une matrice est égal au nombre de pivots de sa matrice réduite échelonnée par lignes (ou par colonnes)

3.3 Caractérisations des matrices inversibles et calcul de l'inverse

théorème 23: première caractérisation des matrices inversibles

Soit A une matrice carrée.
Il y a équivalence entre:

i) A est inversible
ii) A est associée à un endomorphisme bijectif (càd un automorphisme)
iii) les vecteurs colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$
iv) les vecteurs colonnes de A engendrent $\mathbb{K}^n$
v) $\mathrm{rg}(A) = n$
vi) $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$
vii) $\ker(A) = \{0\}$
viii) les vecteurs lignes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$
ix) $A \underset{L}{\sim} I_n$ (moins utile)
x) $\det(A) \neq 0$
xi) le système linéaire associé à A, càd $AX = B$, est un système de Cramer, càd possède une et une seule solution.

théorème 24: deuxème caractérisation des matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) A est inversible
ii) le système $AX = 0$ n'admet que la solution $X = 0$
iii) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ n'admet qu'une solution (...qui est $X = A^{-1}B$)
iv) Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution

Avec les notations mathématiques, les propositions précédentes s'écrivent

i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
ii) $AX = 0 \Longrightarrow X = 0$ (ou encore $AX = 0 \Longleftrightarrow X = 0$)
iii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists !\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = B$
iv) $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = B$

On en déduit en particulier que:

- Si pour tout B, le système possède au moins une solution alors pour tout B, le système possède une unique solution.
- Si pour un B particulier, le système $AX = B$ n'admet pas de solution alors A n'est pas inversible.
- Si pour un B particulier, le système $AX = B$ admet une infinité de solutions alors A n'est pas inversible.
- Si A n'est pas inversible, alors il existe un B particulier pour lequel le système $AX = B$ ne possède pas de solution
- Si A n'est pas inversible, alors il existe un B particulier pour lequel le système $AX = B$ possède une infinité de solutions

méthode 3: première méthode de calcul de A^{-1}

On part du système d'équations $AX = Y$, on le résout avec la méthode du pivot , on obtient le système $X = A^{-1}Y$ et on en déduit A^{-1}!

exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

On considère le système associé à A : $\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = y_1 \\ 3x_1 + 8x_2 & = y_2 \end{cases}$

- *la transformation* $E_2 \longleftarrow E_2 - 3E_1$ *donne* $\begin{cases} x_1 & + & 3x_2 & = y_1 \\ & - & x_2 & = y_2 - 3y_1 \end{cases}$
- *la transformation* $E_2 \longleftarrow -E_2$ *donne* $\begin{cases} x_1 & + & 3x_2 & = y_1 \\ & & x_2 & = 3y_1 - y_2 \end{cases}$
- *la transformation* $E_1 \longleftarrow E_1 - 3E_2$ *donne* $\begin{cases} x_1 & = -8y_1 + 3y_2 \\ x_2 & = 3y_1 - y_2 \end{cases}$

On peut donc conclure que A *est inversible et que* $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$

exemple 19: exemple de la méthode 3 avec la matrice augmentée

Il est tout à fait possible d'appliquer la méthode 3 sur la matrice augmentée su système plutôt que sur le système lui-même.

exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

On considère la matrice augmentée du système associé à A : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 3 & 8 & y_2 \end{array}\right)$

- *la transvection* $L_1 \longleftarrow L_2 - 3L_1$ *donne* $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 0 & -1 & y_2 - 3y_1 \end{array}\right)$
- *la dilatation* $L_2 \longleftarrow -L_2$ *donne* $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & y_1 \\ 0 & 1 & 3y_1 - y_2 \end{array}\right)$
- *la transvection* $L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_2$ *donne* $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -8y_1 + 3y_2 \\ 0 & 1 & 3y_1 - y_2 \end{array}\right)$

On peut donc conclure que A *est inversible et que* $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$

méthode 4: deuxième méthode de calcul de A^{-1}

Pour obtenir A^{-1}, il suffit de faire subir à I_n la même suite de transformations élémentaires que celle qui fait passer de A à I_n

On peut utiliser une suite de transformations sur les lignes ou une suite de transformations sur les colonnes.

Mais attention, il ne faut pas mélanger les deux types de transformations!

Exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. *On considère la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 3 & 8 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- *la transformation* $L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1$ *donne* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & -1 & | & -3 & 1 \end{pmatrix}$
- *puis la transformation* $L_2 \longleftarrow -L_2$ *donne* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 3 & -1 \end{pmatrix}$
- *enfin la transformation* $L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_2$ *donne* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -8 & 3 \\ 0 & 1 & | & 3 & -1 \end{pmatrix}$

On peut donc conclure que A *est inversible et que* $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$

4 Formules de changement de bases

définition 13:

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

On appelle <u>matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$</u> la matrice de la famille de vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

On la note $\boxed{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \text{ ou } P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}}$.

Traditionnellement, on appelle <u>ancienne base</u> la base $\mathcal{B}$ et <u>nouvelle base</u> la base $\mathcal{B}'$

méthode 5: comment écrire une matrice de passage

On écrit colonne par colonne les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base exprimées dans l'ancienne base.

un exemple dans $\mathbb{R}^3$:

considérons la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ainsi que la base $\mathcal{B}' = (\vec{k}, -\vec{i}, 2\vec{j}+\vec{i})$.

On a alors $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si l'on souhaite écrire $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ nous allons devoir exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. Ici ce n'est pas très compliqué car on remarque que

$$\vec{i} = -(-\vec{i}) \quad , \quad \vec{j} = \frac{1}{2}(2\vec{j}+\vec{i}) + \frac{1}{2}(-\vec{i}) \quad \text{et} \quad \vec{k} = \vec{k}$$

On a donc $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

théorème 25: deux propriétés des matrices de passage

1. Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E , alors $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ *(formule de Chasles)*
2. La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$

exemple 20: dans un espace de polynômes

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$.
On considère les bases $\mathcal{B} = (X^3,X^2,X,1)$ et $\mathcal{B}' = ((X+1)^3,(X+1)^2,X+1,1)$.
Ecrire $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$

remarque 9 (*Astuce utile pour le théorème suivant!*)

On se rappelle que multiplier à droite une matrice M par la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *revient à en extraire la première colonne, multiplier par* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *revient à en extraire la deuxième colonne etc.*

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

théorème 26: formule de changement de base pour les vecteurs (par coeur)

Soient:

- $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e'_1}, \ldots, \overrightarrow{e'_n})$ deux bases de E.
- $\vec{x}$ un vecteur de E.

On note:

- P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- X [resp. X'] sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ [resp. $\mathcal{B}'$].

On a alors la formule $\boxed{X = P.X'}$

rem: bien noter que l'on a les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles

théorème 27: formule de changement de base pour les endomorphismes (par coeur)

Soit u un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$, ainsi que P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Alors on a la formule $\boxed{A' = P^{-1}AP}$

cette formule équivaut à la formule $A = P.A'.P^{-1}$ (que l'on préférera retenir)

exemple 21:

Soit E un espace vectoriel de dimension 2, de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
Soient $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ avec $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_2$
On considère également le vecteur $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$

1. Donner la matrice associée à $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}'$ de deux manières différentes.
2. Donner la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}'$ de deux manières différentes.

- *La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- *Il est aisé de déterminer l'inverse de cette matrice, on trouve* $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. *D'après la formule de changement de base pour les vecteurs, on a*

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{x}) = X' = P^{-1}. \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. *D'après la formule de changement de base pour les endomorphismes, on a*

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

théorème 28: formule de changement de bases pour les applications linéaires

Soient E un $\mathbb{K}-$ev, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Soient F un $\mathbb{K}-$ev, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$

Alors on a la formule: $\boxed{A' = P_{\mathcal{C}' \to \mathcal{C}}.A.P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}}$

5 Nouveauté de spé : Matrices semblables

définition 14:

Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que la matrice A est semblable à la matrice A' s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P.A'P^{-1}$

théorème 29:

"être semblable à " est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

C'est à dire que:

- toute matrice A est semblable à elle-même.
- si A est semblable à A' alors A' est semblable à A
- si A est semblable à B et B est semblable à C alors A est semblable à C

C'est pour cette raison que l'on dira plus simplement A et A′ sont deux matrices semblables.

exemple 22: à retenir

L'ensemble des matrices semblables à une matrice A donnée étant $\{P.A.P^{-1} | P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}$,
il est alors évident que

- la matrice I_n n'est semblable qu'à elle-même
- la matrice O_n n'est semblable qu'à elle-même
- d'une manière générale, pour tout scalaire $k \in \mathbb{K}$, la matrice kI_n n'est semblable qu'à elle-même.

théorème 30: caractérisation des matrices semblables

Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

1. A et A' sont semblables.
2. A et A' sont associées au même endomorphisme
   càd il existe un endomorphisme u d'un ev E de dimension n, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E tels que $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(u)$

C'est autour de ce résultat que l'on travaillera dans le prochain chapitre: parmi toutes les matrices qui sont associées à un même endomorphisme, on cherchera les matrices qui sont les "plus simples" ...

théorème 31: démonstration par récurrence pour Ãªtre rigoureux

$\boxed{\text{Si } B = P.A.P^{-1} \text{ alors pour tout } k \in \mathbb{N}, B^k = P.A^k.P^{-1}}$.

théorème 32:

Deux matrices semblables ont même determinant, même trace et même rang.
mais a priori elles n'ont pas même noyau ni même image

remarque 10 (*Attention !*)

mais deux matrices qui ont le même determinant, la même trace et le même rang ne sont pas necessairement semblables ! Chercher un contre-exemple.

exemple 23:

Montrer que si A et B sont semblables et A inversible alors B est inversible et A^{-1} et B^{-1} sont semblables

méthode 6: comment montrer que deux matrices sont semblables I

On justifie que les matrices A et B sont semblables, en montrant qu'elles sont toutes les deux associées à un mÃªme endomorphisme, l'endomorphisme canoniquement associé à A

Exemple:

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ *sont semblables*

- On note $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On a donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
- Il s'agit de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, c'est à dire telle que $\begin{cases} f(\vec{e}_1) & = 6\vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) & = \vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 \end{cases}$
- Notons $\vec{e}_1 = (x,y) = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ et $X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

  On a les équivalences suivantes

  $$f(\vec{e}_1) = 6\vec{e}_1 \iff AX_1 = 6X_1 \iff (A - 6I_2).X_1 = 0$$

  Or

  $$(A - 6I_2).X_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y & = 0 \\ 4x - 2y & = 0 \end{cases} \iff y = 2x$$

  On peut donc par exemple poser $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ càd $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} = (1,2)$
- Notons maintenant $\vec{e}_2 = (x,y) = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

  On a les équivalences suivantes

  $$f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 \iff AX_2 = X_1 + 6X_2 \iff (A - 6I_2)X_2 = X_1$$

  Or

  $$(A - 6I_2)X_2 = X_1 \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y & = 1 \\ 4x - 2y & = 2 \end{cases} \iff y = 2x - 1$$

  On peut donc par exemple poser $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ càd $\vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{j} = (1,1)$
- Vérifions que la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ constitue bien une base de $\mathbb{R}^2$, par exemple en utilisant le déterminant.

  On a bien $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$
- Conclusion: on a prouvé que A et B sont associées à un mÃªme endomorphisme: elles sont donc semblables. On peut mÃªme préciser d'après la formule de changement de base pour les endomorphismes que l'on a l'égalité matricielle $A = P.B.P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque: Il n'est pas nécessaire d'expliciter l'expression analytique de l'endomorphisme f.

méthode 7: comment montrer que deux matrices sont semblables II

Une seconde méthode consiste à ne pas considérer l'endomorphisme associé et à ne raisonner qu'avec les matrices colonnes