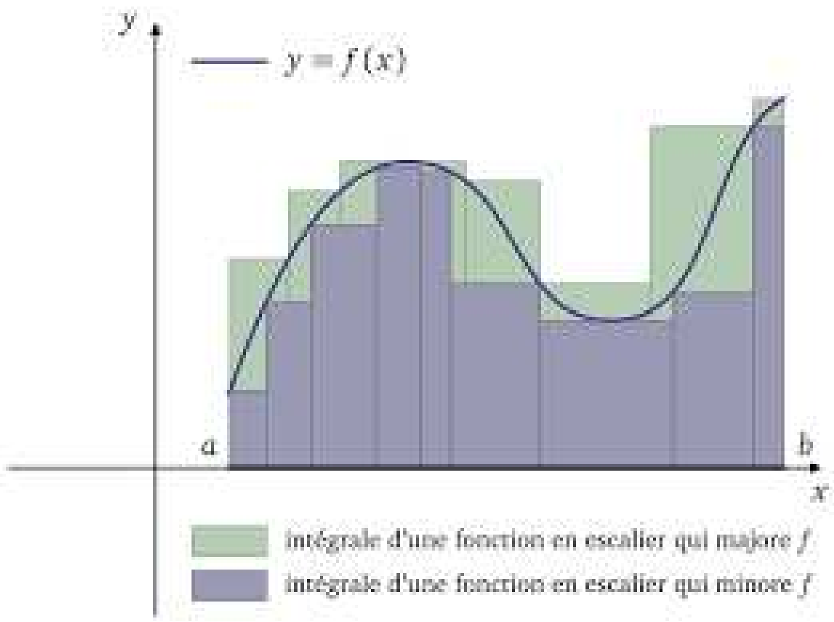
INTEGRATION I
rappels de sup'

Serge Lemarquis

Table des matières

- Dans tout ce résumé, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
- On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.
- **En intégration, la notion de segment est fondamental.**



1 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

définition 1: primitive

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que <u>F est une primitive de f sur I</u> lorsque F est dérivable sur I et que $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

théorème 1:

Soit I <u>un intervalle</u> de $\mathbb{R}$, et f une fonction <u>définie et continue sur I</u> à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors:

i) f possède une infinité de primitives sur I, qui sont égales à une constante près.

ii) pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ fixés, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

C'est ce théorème que l'on doit invoquer pour justifier l'existence d'une primitive

remarque 1

Dans le théorème précédent, comme dans tous les théorèmes d'ailleurs, chaque hypothèse est importante: en particulier, le fait que I soit un intervalle est indispensable pour ii).

Considérons la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}}$

Ainsi que les fonctions $\boxed{\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln|x| \end{array}}$ *et* $\boxed{\begin{array}{rcl} G : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + 4 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}}$

Les fonctions F et G sont deux primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$,
en effet, $\forall x \in \mathbb{R}^*, F'(x) = G'(x) = f(x)$
Mais sur $\mathbb{R}^*$, F et G ne sont pas égales à une constante près.
en effet, sur $\mathbb{R}^*$, $F - G$ n'est pas une fonction constante.

théorème 2: théorème fondamental de l'analyse

Soit I un <u>intervalle</u> de $\mathbb{R}$, x_0 un élément de I et f une fonction définie et <u>continue</u> sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

La fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} F : I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt \end{array}}$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0.

exemple: on rappelle que la fonction $\ln$ *est l'unique primitive de la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t}$ *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$ *qui s'annule en un. On a donc* $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \ \ln(x) = \int_1^x \dfrac{dt}{t}}$

exemple 1:

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Justifier que les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, puis donner leurs dérivées.

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt \qquad G : x \mapsto \int_3^{x^2} f(t)dt \qquad H : x \mapsto \int_{-x}^{x^2} f(t)dt \qquad J : x \mapsto \int_0^x e^{3x}.f(t)dt$$

remarque 2 (***il faut bien faire la différence entre primitive et intégrale***)

- *une primitive est une fonction*
- *une intégrale est un scalaire*

exemple 2:

On considère la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x^2} \end{array}}$

Déterminer, à l'aide d'une expression intégrale, la primitive de f sur $\mathbb{R}$...

i)... qui s'annule en π *ii)*... qui vaut 3 en π *iii)*... qui vaut π en 3

méthode 1: notations des primitives

f étant une fonction continue sur un intervalle I, on note souvent :

i) $\displaystyle\int f(x)dx$ la primitive générique de f sur I

exemple: $\displaystyle\int \frac{2dx}{1-x^2} = \int \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}dx = \ln|1+x| - \ln|1-x| + cste$

ii) $\displaystyle\int^x f(t)dt$ la primitive générique de f sur I

exemple: $\displaystyle\int^x \frac{2dt}{1-t^2} = \int^x \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}dt = \ln|1+x| - \ln|1-x| + cste$

iii) $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt$ la primitive de f sur I qui s'annule en x_0

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{1-x^2}$ *est continue sur l'intervalle* $]1,+\infty[$,
elle admet donc une unique primitive qui s'annule en 2, et c'est la fonction

$$F : x \mapsto \int_2^x \frac{2dt}{1-t^2} = \ln|1+x| - \ln|1-x| - (\ln 3 - \ln 1) = \ln(1+x) - \ln(x-1) - \ln 3$$

Il est toujours recommandé de donner un nom aux fonctions que l'on considère

2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

- **En théorie de l'intégration, on commence par définir les intégrales de fonctions continues sur un segment**(c'est le programme de première année) puis on étend cette notion à des intervalles autres que des segments(c'est l'objet du programme de seconde année)
- Il existe différentes manières de construire l'intégrale d'une fonction continue sur un segment: sommes de Darboux, sommes de Riemann, convergence uniforme de suites de fonctions en escalier... Chacune de ces manières relient la notion d'intégrale à celle "d'aire sous la courbe" (la formule du théorème ci-dessous n'est donc pas posée par définition mais résulte du fruit d'un raisonnement) pour plus de détails, voir le cours de première année.

théorème 3: théorème fondamental qui établit le lien entre intégrale et primitive quand f est continue

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors:

i) l'intégrale de f sur le segment $[a,b]$ existe, càd $\int_a^b f$ existe.

ii) et l'on a $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ où F désigne une primitive quelconque de f sur $[a,b]$

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment existe toujours. on dira encore qu'
"une fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment".
c'est cette phrase que l'on écrit pour justifier l'existence d'une intégrale

– L'intégrale d'une fonction continue sur un segment existe toujours. . . contrairement à l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle quelconque!(voir le prochain polycopié)

– Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, l'intégrale de f sur $[a,b]$ est notée $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f$

– Lorsque $a > b$, la notation $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f$ a également un sens: par définition, on a posé

$$\int_a^b f = -\int_b^a f = -\int_{[b,a]} f$$

– dans une intégrale, la variable est muette: elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre. D'où: $\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\theta)d\theta = \int_a^b f(\zeta)d\zeta = \dots}$

2.1 Propriétés

théorème 4: l'intégrale d'une fonction positive est positive

Soit f une fonction continue et positive sur le segment $[a,b]$ (avec ici $a \leqslant b$)). Alors:

i) $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$

ii) $\int_{[a,b]} f = 0$ ssi f est (identiquement) nulle sur $[a,b]$ **(ici** $a < b$**)**

démonstration

- *Soit f une fonction continue et positive sur le segment $[a,b]$*
  Par théorème, on sait que f possède une primitive sur ce segment, notons la F.
- *Sur l'intervalle $[a,b]$, on a $F' = f \geqslant 0$.*
  La fonction F est donc croissante(au sens large) sur l'intervalle $[a,b]$.
  Par définition d'une fonction croissante,
  comme $a \leqslant b$ on a $F(a) \leqslant F(b)$,
  et donc $\int_a^b f = F(b) - F(a) \geqslant 0$
- *Supposons de plus que $\int_a^b f = 0$ avec $a < b$*
  Ceci signifie que $F(a) = F(b)$.
  Ainsi on sait que la fonction F est croissante sur $[a,b]$ et que $F(a) = F(b)$: on peut affirmer que F est constante sur $[a,b]$.
  On a alors sa dérivée qui est forcément nulle sur $[a,b]$,
  càd $\forall t \in [a,b], f(t) = F'(t) = 0$: f est bien identiquement nulle sur $[a,b]$
- *Réciproquement, si f est identiquement nulle sur $[a,b]$ il est immédiat que $\int_a^b f = 0$*

théorème 5: Relation de Chasles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C^0(I,\mathbb{K})$

i) $\forall (a,b,c) \in I^3$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

ii) $\forall (a,b) \in I^2$,

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

exemple 3: important dans la pratique, rédaction à adopter

Montrer que $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t})dt$ existe et est strictement positive.

- La fonction $\sqrt{}$ est continue sur $[0,\pi^2]$ à valeurs dans $[0,\pi]$
- La fonction sin est continue de $[0,\pi]$ à valeurs dans $[0,1]$
- Par composition, on peut donc affirmer que la fonction $f : t \mapsto \sin(\sqrt{t})$ est continue sur $[0,\pi^2]$ à valeurs dans $[0,1]$

1. Comme la fonction f est continue sur le segment $[0,\pi^2]$, et qu'une fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment, on peut affirmer que $\int_0^{\pi^2} f(t)dt$ existe
2. Comme la fonction f est continue et positive sur le segment $[0,\pi^2]$, on peut affirmer par théorème que $\int_0^{\pi^2} f(t)dt \geqslant 0$
3. Comme la fonction f est continue, positive et n'est pas identiquement nulle sur $[0,\pi^2]$ (en effet, $f(\pi^2/4) = 1 \neq 0$), on peut affirmer par théorème que $\int_0^{\pi^2} f > 0$

exemple 4: une rédaction parfaite!

Montrer que $\dfrac{\pi^2}{16} \leqslant \int_0^{\pi/2} \dfrac{t}{1+\sin(t)}dt \leqslant \dfrac{\pi^2}{8}$

Solution:

- Soit $t \in [0,\pi/2]$.
  On a donc
  $$1 \leqslant 1+\sin(t) \leqslant 2$$
  Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$, on a:
  $$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+\sin t} \leqslant 1$$
  Comme $t \geqslant 0$, on en déduit que:
  $$\frac{t}{2} \leqslant \frac{t}{1+\sin t} \leqslant t$$
  On vient de montrer que
  $$\boxed{\forall t \in [0,\pi/2], \quad \frac{t}{2} \leqslant \frac{t}{1+\sin t} \leqslant t}$$
- Par croissance de l'intégrale, on peut alors affirmer que
  $$\int_0^{\pi/2} \frac{t}{2}dt \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{t}{1+\sin t}dt \leqslant \int_0^{\pi/2} tdt$$
  ce qui donne bien
  $$\frac{\pi^2}{16} \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{t}{1+\sin(t)}dt \leqslant \frac{\pi^2}{8}$$

théorème 6: croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$.

Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$
. (c-à-d $\forall t \in [a,b], f(t) \leqslant g(t)$)

alors $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$

définition 2:

On appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a,b]$ le scalaire suivant : $\boxed{\dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt}$

exemple 5: fonctions périodiques

Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et $T > 0$ un réel fixé.
On suppose que f est une fonction $T-$périodique, c'est à dire que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = f(t)$.

1. Montrer que la valeur moyenne de f sur tout segment de longueur T est indépendant du segment choisi.
2. Montrer que si de plus f est paire [resp. impaire] alors $\int_0^T f = 2\int_0^{T/2} f$ [resp. $\int_0^T f = 0$]

théorème 7: inégalité triangulaire intégrale

Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$.
Alors :
$$\boxed{\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|}$$

théorème 8: linéarité de l'intégrale

L'application $\boxed{\begin{array}{ccc} C^0([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)dt \end{array}}$ est une application linéaire.

c'est à dire:
l'application qui à une fonction associe son intégrale sur un segment donné est une application linéaire

remarque 3

Le théorème ci-dessus est souvent utilisé sans le citer dans les calculs, c'est lui qui nous permet d'écrire

$$\forall (f,g) \in (C^0([a,b],\mathbb{K}))^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$

exemple 6: un exemple vraiment très complet

On considère la fonction g définie par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}dt$

1. *Montrer que la fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$*
2. *Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x*
3. *Montrer que g est une fonction impaire*
4. *Déterminer le signe de g'*
5. *Montrer que $\forall x \geqslant 0, 0 \leqslant g(x) \leqslant xe^{-x^2}$, puis donner $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$*
6. *Faire le TV et donner l'allure de la courbe représentative de g*

Solution:

1. Notons $\boxed{\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{-t^2} \end{array}}$
   La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, elle possède donc une primitive sur cet intervalle.
   Notons F une de ses primitives.
   (la fonction F est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$ et à dérivée continue)
   On a
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = F(2x) - F(x)}$$
   La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car c'est la différence de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et l'on a
   $$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2F'(2x) - F(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$
   La fonction g' est la différence de deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc g' est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   Ceci prouve qu'en fait $\boxed{g \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

2. i) On a $g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$

   ii) Soit $x > 0$.
   On a $x < 2x$ et la fonction f est continue et positive sur le segment $[x,2x]$ sans y être identiquement nulle: on peut donc affirmer par théorème que $g(x) = \int_x^{2x} f(t)dt > 0$

   iii) Soit $x < 0$.
   On a $2x < x$ et la fonction f est continue et positive sur le segment $[x,2x]$ sans y être identiquement nulle: on peut donc affirmer par théorème que $\int_{2x}^{x} f(t)dt > 0$,
   et donc $g(x) = \int_x^{2x} f(t)dt = -\int_{2x}^{x} f(t)dt < 0$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   On considère $g(-x) = \int_{-x}^{-2x} f(t)dt$
   et on effectue le changement de variable $\theta = -t$ (et donc $d\theta = -dt$).
   On obtient:
   $$g(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2}dt = \int_{x}^{2x} e^{-(-\theta)^2}(-d\theta) = -\int_{x}^{2x} e^{-\theta^2}d\theta = -g(x)$$
   On a montré que $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = -g(x)$, càd que $\boxed{g \text{ est une fonction impaire.}}$
4. On a vu que pour tout x réel $g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-4x^2}(2 - e^{3x^2}) = e^{-4x^2}(e^{\ln 2} - e^{3x^2})$

   Comme $e^{-4x^2} > 0$, le signe de $g(x)$ est donné par le signe de $e^{\ln 2} - e^{3x^2}$

   On a
   $$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 = \ln 2 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$$
   et
   $$g'(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln 2 > 3x^2 \Longleftrightarrow \frac{\ln 2}{3} > x^2 \Longleftrightarrow \sqrt{\frac{\ln 2}{3}} > |x|$$
5. Soit $x \geqslant 0$
   On remarque déjà que $0 \leqslant x \leqslant 2x$
   - La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur le segment $[x,2x]$.
     Par théorème, on peut affirmer que $g(x) = \int_{x}^{2x} f(t)dt \geqslant 0$
   - Comme on a $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = -2te^{-t^2}$, on peut affirmer que la fonction f est décroissante sur $[0,+\infty[$ et a fortiori sur $[x,2x]$. On a donc
     $$\forall t \in [x,2x], f(t) \leqslant f(x) = e^{-x^2}$$
     en intégrant sur ce segment, par croissance de l'intégrale, cela donne
     $$g(x) = \int_{x}^{2x} f(t)dt \leqslant \int_{x}^{2x} e^{-x^2}dt = (2x-x)e^{-x^2} = x.e^{-x^2}$$
   - Au final, on a montré que $\boxed{\forall x \geqslant 0, 0 \leqslant g(x) \leqslant xe^{-x^2}}$
   - Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x.e^{-x^2} = 0$, on peut affirmer d'après le théorème de convergence par encadrement que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0}$
6. .

2.2 Tableau des primitives

- vous devez le connaître par coeur: inutile donc de le reproduire ici!
- A noter que si $\int^x f(t)dt = F(x) + cste$ alors $\int^x f(at+b)dt = \frac{1}{a}F(ax+b) + cste$

méthode 2: Primitives des fonctions de la forme $t \mapsto \frac{1}{at^2+bt+c}$

On note $P(t) = at^2 + bt + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.
Trois cas sont à distinguer suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$

i) si $\Delta > 0$ ceci signifie que P est possède deux racines réelles distinctes α et β.

$\frac{1}{P(t)}$ peut donc se décomposer sous la forme $\frac{\lambda}{t-\alpha} + \frac{\mu}{t-\beta}$ avec λ et μ deux constantes réelles.

On a donc $\boxed{\int^x \frac{dt}{at^2+bt+c} = \lambda \ln|x-\alpha| + \mu \ln|x-\beta| + cste}$

ii) si $\Delta = 0$ ceci signifie que P possède une racine double réelle α.

On a la factorisation $\frac{1}{P(t)} = \frac{1/a}{(t-\alpha)^2}$ et donc $\boxed{\int^x \frac{dt}{at^2+bt+c} = -\frac{1/a}{(x-\alpha)} + cste}$

iii) si $\Delta < 0$ ceci signifie que P ne possède pas de racines réelles.

La méthode consiste alors à <u>mettre sous forme canonique le polynôme</u> $P(t)$

Il existe α et $\beta \neq 0$ tels que $\frac{1}{P(t)} = \frac{1/a}{(t+\alpha)^2+\beta^2}$.

Le changement de variable affine $u = \frac{t+\alpha}{\beta}$ permet le calcul suivant:

$$\begin{aligned}\int^x \frac{dt}{at^2+bt+c} &= \frac{1/a}{\beta^2}\int^x \frac{dt}{((t+\alpha)/\beta)^2+1}\\ &= \frac{1/a}{\beta}\int^{(x+\alpha)/\beta} \frac{du}{u^2+1} = \frac{1/a}{\beta}\arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right) + Cste\end{aligned}$$

Exemple:

Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \frac{1}{2t^2+8t+18}$

- *Le discriminant vaut $\Delta = 8^2 - 4.2.18 = 8^2 - 4.4.9 = 8^2 - (4.3)^2 < 0$*
  La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas
- *On écrit $2t^2 + 8t + 18 = 2(t^2 + 4t + 9) = 2\left((t+2)^2 + 5\right)$ et ainsi*

$$\int f(t)dt = \int \frac{dt}{2t^2+4t+9} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+2)^2+5} = \frac{1}{10}\int \frac{dt}{\left(\frac{t+2}{\sqrt{5}}\right)^2+1}$$

- *On effectue le changement de variable $u = \frac{t+2}{\sqrt{5}}$ (et donc $du = \frac{dt}{\sqrt{5}}$)*

$$\int f(t)dt = \frac{1}{10}\int \frac{\sqrt{5}du}{u^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\arctan(u) + Cste = \frac{1}{2\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{t+2}{\sqrt{5}}\right) + Cste$$

On rappelle que la méthode de mise sous forme canonique

$$aX^2 + bX + c = a.\left[X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}\right] = a.\left[\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

2.3 Intégration par parties

théorème 9: intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I. **Alors** :

$$\boxed{\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt}$$

exemple 7: primitive de arcsin

- La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1, +1]$: elle possède donc une primitive sur cet intervalle.
- Nous allons déterminer une primitive de arcsin... mais attention! arcsin est de classe C^1 sur $]-1,+1[$ uniquement!
- Sur l'intervalle $]-1, +1[$, on pose $u(t) = t$ (et donc $u'(t) = 1$) et $v'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ (et on choisit $v(t) = \arcsin t$), u et v sont bien C^1 sur $]-1, +1[$

  la formule d'intégration par parties donne

  $$\int^x \arcsin(t)dt = x.\arcsin(x) - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = x.\arcsin(x) - \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}dt = x.\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + Cste$$

  Cette formule n'est valable, a priori, que sur $]-1, +1[$
  mais l'on peut montrer qu'elle est aussi valable sur $[-1, +1]$

méthode 3: ipp pour déterminer des primitives

A utiliser pour déterminer les primitives des fonctions du type:

$t \mapsto e^{mt}.P(t)$, $t \mapsto \cos(mt).P(t)$, $t \mapsto \sin(mt).P(t)$, $t \mapsto \mathrm{ch}(mt).P(t)$, $t \mapsto \mathrm{sh}(mt).P(t)$

où m est une constante réelle et P un polynôme, en dérivant toujours le polynôme.

méthode 4: autres méthode

En effectuant des ipp on montre que:

- Une primitive de $t \mapsto e^{mt}P(t)$ est du type $t \mapsto e^{mt}Q(t)$ où Q est un polynôme de même degré que celui de P
- Une primitive de $t \mapsto P(t)\sin(mt)$ ou $t \mapsto P(t)\cos(mt)$ est du type
  $t \mapsto P_1(t)\sin(mt) + P_2(t)\cos(mt)$ où P_1 et P_2 sont deux polynômes de degré inférieur à celui de P

Ceci nous permet de déterminer des primitives en utilisant des coefficients inconnus puis en identifiant

2.3.1 Complexification

- A utiliser pour déterminer les primitives des fonctions du type

  $t \mapsto e^{mt}\cos(qt)$, $t \mapsto e^{mt}\sin(qt)$, $t \mapsto e^{mt}\cos(qt)P(t)$, $t \mapsto e^{mt}\sin(qt)P(t)$

  où m et q sont deux constantes réelles, et P un polynôme à coefficients réels

2.4 Changement de variables

théorème 10: changement de variable(appellation peu adaptée en fait)

Soient $f \in C^0(I,\mathbb{R})$ et $\phi \in C^1([c,d],I)$. **Alors** :

$$\boxed{\int_c^d f(\phi(u))\phi'(u)du = \int_a^b f(t)dt \text{ où } a = \phi(c) \text{ et } b = \phi(d)}$$

Si F désigne une primitive de f alors la fonction $F \circ \phi$ est une primitive de la fonction $\phi' \times f \circ \phi$
Il s'agit juste de reconnaitre ou de faire apparaitre la dérivée d'une fonction composée

remarque 4

- *Si F désigne une primitive de f sur I, la fonction $F \circ \phi$ est une primitive de la fonction $\phi' \times f \circ \phi$ sur l'intervalle $[c,d]$. La démonstation consiste d'ailleurs seulement en ceci!*

$$\int_c^d f(\phi(u))\phi'(u)du = \int_c^d (F\circ\phi)'(u)du = [F \circ \phi(u)]_c^d = F(\phi(d)) - F(\phi(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

- *Noter que ϕ n'est pas nécessairement bijective!*

$$\int_0^{3\pi} \arctan(\sin u).\cos u\, du = \int_0^0 \arctan t dt = 0 \text{ (on a posé } t = \sin u)$$

(il faut juste s'assurer que ϕ est C^1 sur $[c,d]$, ce qui est le cas de la fonction $\sin$ *sur* $[0,3\pi]$*)*

- *Mais, tout de même, dans la pratique, on considère souvent des changements de variables bijectifs!*
- *voir l'annexe 1 pour les changements de variables classiques... mais hors-programme.*

exemple 8:

Soit $\alpha \in]0,\frac{\pi}{4}[$ fixé.
Calculer $\int_\alpha^{\pi/2-\alpha} \sin(t).\cos(t).\ln(\tan t)dt$ en posant $x = \frac{\pi}{2} - t$

exemple 9:

Calculer $F(x) = \int_0^x \dfrac{dt}{\text{ch}(t)}$ de deux manières différentes

i) Le changement de variable $u = \text{sh}(t)$ donne

$$F(x) = \int_0^x \frac{\text{ch}(t)}{\text{ch}^2 t}dt = \int_0^x \frac{\text{ch}(t)}{1+\text{sh}^2(t)} = \int_0^{\text{sh}\, x} \frac{du}{1+u^2} = [\arctan(u)]_0^{\text{sh}\, x} = \arctan(\text{sh}\, x)$$

ii) Le changement de variable $u = e^t$ donne

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\text{ch}\, t} = \int_0^x \frac{2dt}{e^t + e^{-t}} = \int_0^x \frac{2e^t dt}{e^{2t}+1} = \int_1^{e^x} \frac{2du}{u^2+1} = [2\arctan(u)]_1^{e^x} = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$$

iii) On vient de prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(\text{sh}\, x) = 2\arctan(e^x) - \dfrac{\pi}{2}$

2.5 Formules de Taylor

théorème 11: formule de Taylor avec reste intégral

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors:

$$\boxed{\text{pour tous } a \text{ et } b \text{ éléments de } I, \text{ on a } f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt}$$

Dans le cas où $n = 0$*, la formule donne* $\boxed{\text{si } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ alors on a } f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt}$

la démonstration se réalise par récurrence sur n.

- **initialisation:**
  la fonction f' possède comme primitive la fonction f (!)
  On a donc $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ soit $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$
  (ce qui correspond à la relation cherchée pour $n = 0$)

- **hérédité:**
  On réalise une ipp sur l'intégrale $\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ en posant:
  $u(t) = \dfrac{-(b-t)^{n+1}}{n+1}$ (et donc $u'(t) = (b-t)^n$ et $v(t) = f^{(n+1)}(t)$ (et donc $v'(t) = f^{(n+2)}(t)$)
  On a
  $$[u(t)v(t)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(a)$$
  Ainsi
  $$\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(a) + \frac{1}{n+1}\int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$$
  et donc $\dfrac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \dfrac{1}{(n+1)!}\int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt$

corollaire 1 (*inégalité de Taylor-Lagrange*)

Si $f \in C^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$ *et* ***si*** $|f^{n+1}| \leqslant M$ *sur* $[a,b]$ *(où* M *est une constante positive)* ***alors***

$$\boxed{\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{M}{n!}\int_a^b (b-t)^n dt = \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}$$

démonstration

On a

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| = \left| \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \right| \leqslant \frac{1}{n!}\int_a^b \left| (b-t)^n f^{(n+1)}(t) \right| dt$$

Or pour tout $t \in [a,b]$ on a

$$\left| (b-t)^n f^{(n+1)}(t) \right| = |b-t|^n |f^{(n+1)}(t)| = (b-t)^n |f^{(n+1)}(t)| \leqslant M.(b-t)^n$$

D'où

$$\frac{1}{n!}\int_a^b \left| (b-t)^n f^{(n+1)}(t) \right| dt \leqslant \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n.Mdt = \frac{M}{n!}\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

exemple 10: Dans cet exemple, on oublie les séries entières

A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$

Notons $f = \exp$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Soit $n \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$ fixé.

La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} e^0 + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt$$

et ainsi

$$|e^x - S_n(x)| = \left| \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt \right| = \frac{1}{n!} \left| \int_0^x (x-t)^n e^t dt \right|$$

Pour majorer proprement cette dernière valeur absolue, on envisage deux cas

- Si $x \geqslant 0$,
  Comme par théorème $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$,
  on a ici
  $$\left| \int_0^x (x-t)^n e^t dt \right| \leqslant \int_0^x \left|(x-t)^n e^t dt\right|$$
  Comme $\forall t \in [0,x], |(x-t)^n e^t| \leqslant x^n.e^x$
  on a par croissance de l'intégrale
  $$\int_0^x \left|(x-t)^n e^t\right| dt \leqslant \int_0^x x^n e^x dt = x^{n+1}.e^x$$
  Ainsi
  $$\left| \int_0^x (x-t)^n e^t dt \right| \leqslant x^{n+1}.e^x$$
  On a prouvé que
  $$\forall n \geqslant 0,\ |e^x - S_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}e^x}{n!}$$
  D'après le théorème des croissances comparées, on a
  $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}e^x}{n!} = 0$$
  on a donc prouvé que
  $$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = e^x$$

- Si $x \leqslant 0$,
  Comme par théorème $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$,
  on a ici
  $$\left| \int_0^x (x-t)^n e^t dt \right| \leqslant \int_x^0 \left|(x-t)^n e^t dt\right|$$
  Comme $\forall t \in [x,0], |(x-t)^n e^t| \leqslant |x|^n.e^0$
  on a par croissance de l'intégrale
  $$\int_x^0 \left|(x-t)^n e^t\right| dt \leqslant \int_x^0 |x|^n dt = |x|^n.(-x) = |x|^{n+1}$$
  Ainsi
  $$\left| \int_0^x (x-t)^n e^t dt \right| \leqslant |x|^{n+1}$$
  On a prouvé que
  $$\forall n \geqslant 0,\ |e^x - S_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!}$$
  D'après le théorème des croissances comparées, on a
  $$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n!} = 0$$
  on a donc prouvé que
  $$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = e^x$$

On a montré que pour tout x réel on a $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = e^x$

c'est à dire que $\boxed{\text{la série } \sum \frac{x^k}{kl} \text{ converge pour tout } x \text{ réel et que } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)}$

rem: il est possible d'avoir des majorations meilleures... A vous de jouer!

2.6 Sommes de Riemann

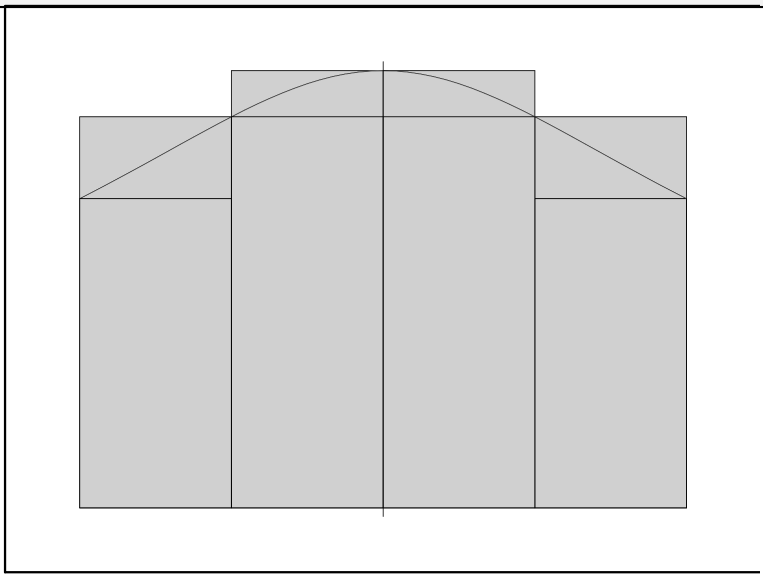
théorème 12: sommes de Riemann

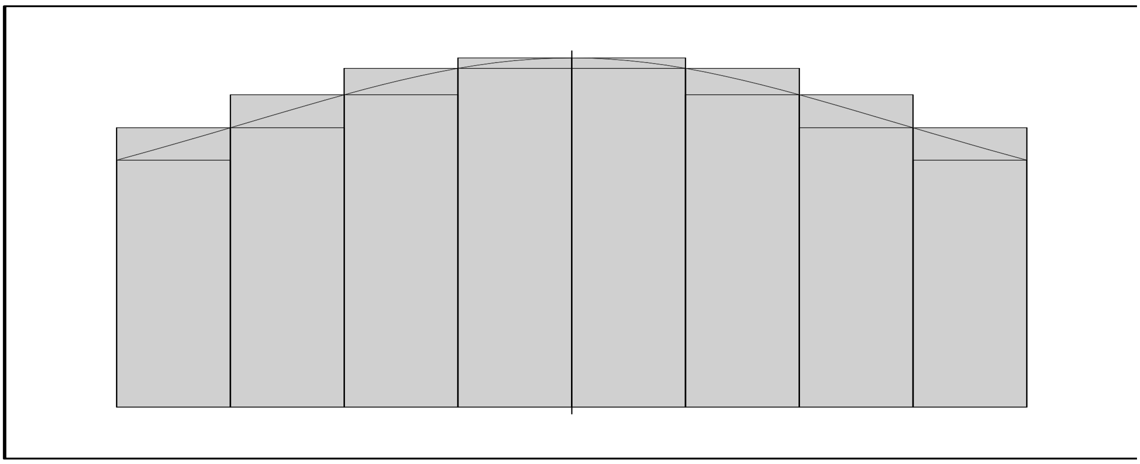
Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

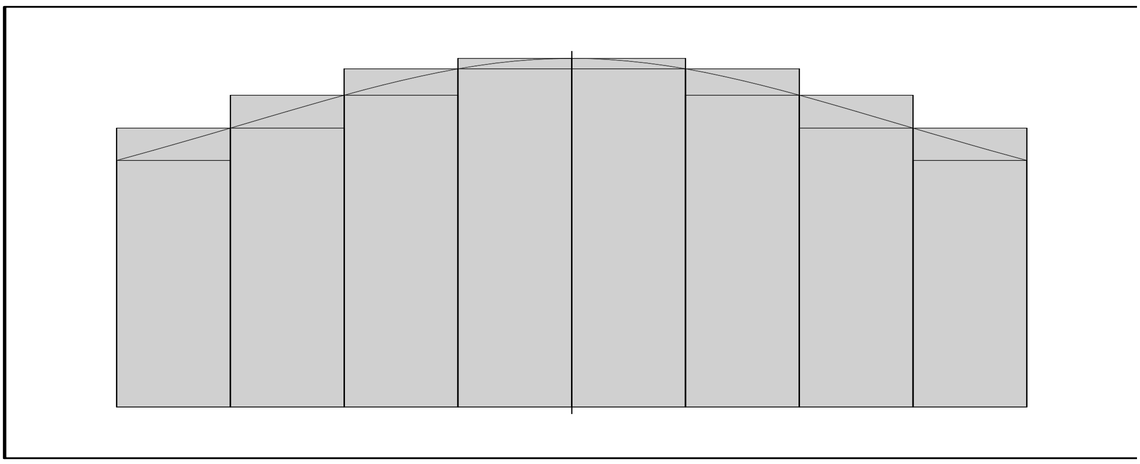
Alors les sommes de Riemann de f convergent vers $\int_{[a,b]} f$. C'est à dire que :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \int_{[a,b]} f} \text{ et } \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \int_{[a,b]} f}$$

dans le cas où f est monotone sur $[a,b]$, les sommes précédentes encadrent l'intégrale







exemple 11: très classique

Déterminons $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}\right)$

On a

$$\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\longrightarrow 0+\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln 2$$

- *On a considéré la fonction* $f:\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{1+t}\end{array}$
- **La méthode consiste à remplacer le** $\frac{i}{n}$ **par** t **(et cela donne la fonction) et à considérer le segment** $[a,b]=[0,1]$
- *On peut remarquer sur cet exemple que le terme "de trop" n'était pas du tout gênant: on pourrait également mettre dans le théorème la formule* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=0}^{n}f(a+i\frac{b-a}{n})=\int_{[a,b]}f$.

remarque 5

Dans les formules des sommes de Riemann, il y a $\sum\limits_{i=0}^{n-1}$ *et* $\sum\limits_{i=1}^{n}$. *Les formules sont encore exactes avec* $\sum\limits_{i=1}^{n-1}$ *ou* $\sum\limits_{i=0}^{n}$ *ou* $\sum\limits_{i=0}^{n-2}$ *comme le prouve l'exemple précédent.*

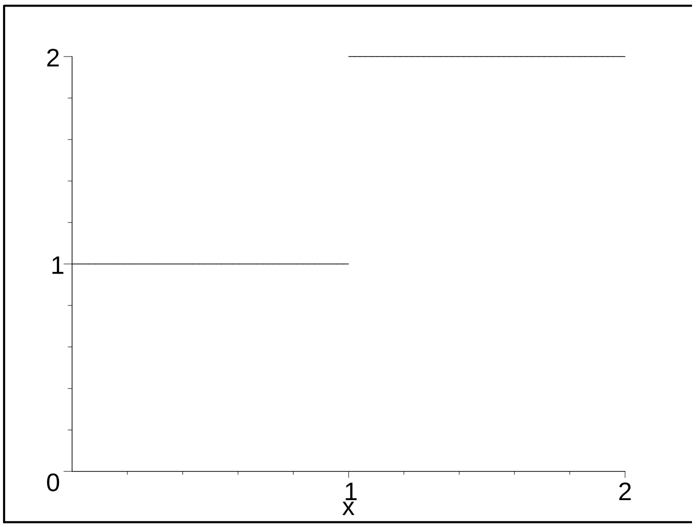
3 Annexe 1: changements de variables classiques (hors-programme)

- polynômes en $\sin t$ et $\cos t$: on se ramène au calcul de $\int \sin^p t\cos^q t dt$ que l'on calcule de la manière suivante :
  - si p est pair et q est impair alors on pose $x=\sin t$
  - si p est impair et q est pair alors on pose $x=\cos t$
  - si p et q sont impairs alors on pose $x=\cos 2t$
  - si p et q sont pairs alors ... on linéarise
- fractions rationnelles en $\sin t$ et $\cos t$: $Q(\sin t,\cos t)=f(t)$ avec $Q\in\mathbb{K}[X,Y]$
  Règle de Bioche :
  - si $f(-t)=-f(t)$ alors on pose $x=\cos t$
  - si $f(\pi-t)=-f(t)$ alors on pose $x=\sin t$
  - si $f(\pi+t)=f(t)$ alors on pose $x=\tan t$
  - sinon on pose $x=\tan\frac{t}{2}$
- fractions rationnelles en e^t ou $\operatorname{sh} t$ et $\operatorname{ch} t$: on pose $x=e^t$
- fractions rationnelles en t et $(\frac{at+b}{ct+d})^{1/n}$: on pose $x=(\frac{at+b}{ct+d})^{1/n}$

4 Annexe 2 : de l'importance du théorème 2

cas d'une fx non C^0 : une intégrale peut exister sans que la primitive existe...

Considérons la fonction f définie sur [0,2] de la manière suivante $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$



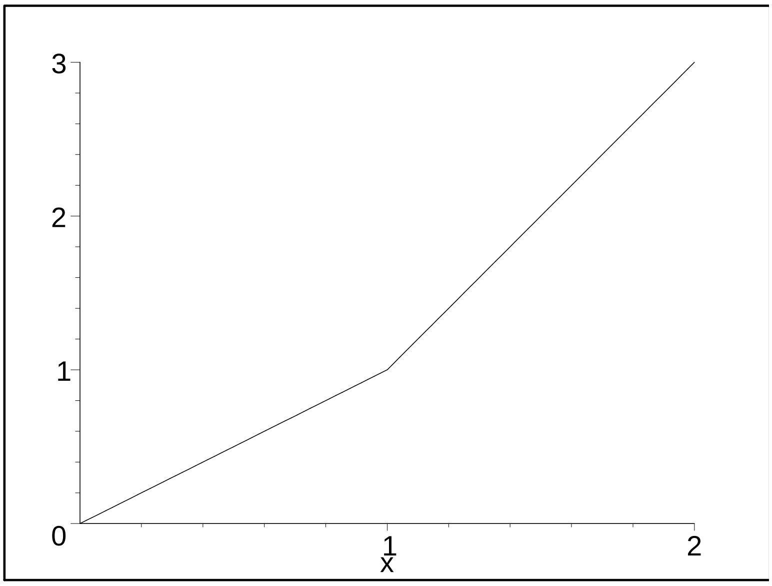
En théorie de l'intégration, il est possible de donner un sens à l'intégrale de f sur [0,2], et d'une manière plus générale à l'intégrale de f sur $[0,x]$ pour tout $x \in [0,2]$.

1. si $x \in [0,1]$, on a $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x 1dt = x$
2. si $x \in]1,2]$, on a $\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = \int_0^1 1dt + \int_1^x 2dt = 1 + 2(x-1) = 2x - 1$

On peut dire que la fonction $\boxed{F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt}$ est bien définie sur [0,2].

Mais attention !

La fonction F n'est pas une primitive de la fonction f sur [0,2],
car la fonction F n'est pas dérivable sur [0,2] ! En effet, le calcul de F nous permet de dessiner son graphe:



- $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-1}{x-1} = 1$, donc F est dérivable à gauche en 1 et $F'_g(1) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{F(x) - F(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x-1-1}{x-1} = 2$, donc F est dérivable à droite en 1 et $F'_d(1) = 2$
- Comme les dérivées à droite et à gauche sont différentes, F n'est pas dérivable en 1

exemple 12: un exemple très important ($a > 0$ est fixé)

Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$ *et tout* $t \geqslant 0$ *on a* $\left|\dfrac{1}{1+t^a} - \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k.t^{ak}\right| \leqslant t^{(n+1)a}$

puis en déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{an+1}$

rappel: on sait que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel $X \neq 1$ on a $\sum\limits_{k=0}^{n} X^k = \dfrac{1-X^{n+1}}{1-X}$

Soit $n \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$.
Comme $-t^a \leqslant 0$ on a $-t^a \neq 1$, on peut appliquer la formule précédente ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k = \frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1-(-t^a)}$$

Soit encore

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak} = \frac{1}{1+t^a} + \frac{(-1)^n t^{a(n+1)}}{1+t^a}$$

D'où

$$\left|\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak}\right| = \left|\frac{-(-1)^n t^{a(n+1)}}{1+t^a}\right| = \frac{t^{a(n+1)}}{1+t^a}$$

De plus, comme $t^a \geqslant 0$ on a $\dfrac{t^{a(n+1)}}{1+t^a} \leqslant t^{a(n+1)}$.
Au final, on a bien montré que

$$\left|\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak}\right| = \left|\frac{-(-1)^n t^{a(n+1)}}{1+t^a}\right| \leqslant t^{a(n+1)} \qquad (*)$$

On sait que par théorème on a $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$ donc ici

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak}\right) dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak}\right| dt$$

De plus par croissance de l'intégrale on a d'après $(*)$

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak}\right| dt \leqslant \int_0^1 t^{a(n+1)} dt = \frac{t^{an+a+1}}{an+a+1} = \frac{1}{an+a+1}$$

On vient donc de justifier que

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak}\right) dt\right| \leqslant \frac{1}{an+a+1}$$

or $$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak}\right) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{ak} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+1}$$

On a donc pour tout entier n

$$\left|\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+1}\right| \leqslant \frac{1}{an+a+1}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{an+a+1} = 0$ on en déduit par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a}$$

on a bien prouvé que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{an+1}$ est convergente et que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{an+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a}$

5 Intégrales faussement généralisées

exemple 13:

Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}dt$.
Cette intégrale est-elle du genre rencontrée précédemment?

La réponse est non... et oui!

Explications:

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.
  Elle n'est donc pas continue sur le segment $[0,\pi]$,
  mais uniquement sur l'intervalle semi-ouvert $]0,\pi]$

- Voyons le graphe de $\boxed{\begin{array}{rcl} f :]0,\pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\sin(t)}{t} \end{array}}$

- La fonction f est *prolongeable par continuité en* 0 car $\lim\limits_{t\to0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$
  Ainsi si on considère la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} \overline{f} : [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array}}$
  La fonction $\overline{f}$ est, quant à elle, continue sur le segment $[0,\pi]$,
  et donc on sait que $\int_0^\pi \overline{f}(t)dt$ existe!

- Dans ce genre de situation, on dit que

$$\textit{l'intégrale } \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}dt \textit{ est faussement généralisée en } 0$$

  et tout se passe comme pour les intégrales "classiques" de première année!

théorème 13: théorème des bornes atteintes

L'image d'un segment par une fonction continue à valeurs réelles est un segment.
autrement dit
Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors il existe $c \leqslant d$ deux réels tels que $f([a,b]) = [c,d]$
Ceci signifie également que tout fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes

définition 3: fonction prolongeable par continuité

Soit I un intervalle, et x_0 un élément de I ou une borne **finie** de I.
Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I - \{x_0\}$.
On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **existe et est finie**

La fonction ainsi prolongée est la fonction $\overline{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Très souvent, l'énoncé dit que "l'on appellera encore f la fonction ainsi prolongée"

rem: on ne dit jamais qu'une fonction est prolongeable par continuité en $+\infty$ ou en $-\infty$

exemple 14:

Parmi les intégrales suivantes, indiquer

- celles qui sont des "intégrales de première année",
- celles qui sont des "intégrales faussement généralisées"
- ...et les autres (que l'on étudiera dans un chapitre ultérieur!)

i) $\int_0^1 \cos(\sin(t^{2022}))dt$

ii) $\int_2^4 \dfrac{dt}{\ln(4-t)}$

iii) $\int_0^1 \ln(t)dt$

iv) $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}dt$

v) $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t}$