DETERMINANTS

Dans ce polycopié, n et p désigneront des entiers supérieurs ou égaux à deux.

Table des matières

1 Déterminant d'une matrice carrée

définition 1: définition-théorème

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, noté det et appelée déterminant, vérifiant les propriétés suivantes:

i. det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable

ii. l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1

iii. $\det I_n = 1$

LE DETERMINANT N'EST PAS UNE APPLICATION LINEAIRE !

Si A désigne une matrice carrée de taille $n \times n$, nous noterons $A_1, A_2 \dots A_n$ ses vecteurs colonnes. On pourra noter $A = (A_1|A_2|\dots|A_n)$ et $\boxed{\det A = \det(A_1|A_2|\dots|A_n)}$

exemple 1:

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on a $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

On a ainsi: $\det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \det(2A_1|3A_2) = 2.\det(A_1|3A_2) = 2.3.\det(A_1|A_2) = 6\det(A)$

ce qui s'écrit plutôt $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.1 & 3.2 \\ 2.3 & 3.4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3.2 \\ 3 & 3.4 \end{vmatrix} = 2.3.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2.3.\det(A)$

Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne

exemple 2: exemple de développement en utilisant la multilinéarité

Soient A_1,A_2,B_1 et B_2 des matrices unicolonnes à deux coefficients.

$$\begin{aligned}\det(2A_1+3A_2|2B_1-5B_2) &= 2.\det(A_1|2B_1-5B_2)+3.\det(A_2|2B_1-5B_2)\\ &= 2.2.\det(A_1|B_1)-2.5.\det(A_1|B_2)+3.2.\det(A_2|B_1)-3.5.\det(A_2|B_2)\end{aligned}$$

Un peu de dénombrement: si A_1,A_2,A_3,$\dots$,C_3 désignent neuf matrices unicolonnes à 3 coefficients, combien de termes obtient-ton en développant par multilinéarité le déterminant suivant?

$$\det(2A_1+3A_2+A_3,|2B_1-5B_2+2B_3|C_1+4C_2-2C_3)$$

exemple 3:

Calculer $\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}$

Puis, d'une manière générale, calculer le déterminant de la matrice $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall i\in[\![1,n]\!], a_{i,n+1-i}=1$ et 0 sinon.

méthode 1: quelques règles de calcul

1. Si une colonne de A est nulle alors $\det A=0$
2. Si deux colonnes de A sont identiques alors $\det A=0$
3. Pour tout scalaire λ et toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\boxed{\det(\lambda A)=\lambda^n.\det(A)}$
4. Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses coefficients diagonaux
5. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux
6. Notons A' la matrice obtenue à partir de A en effectuant une transformation élémentaire.

type d'opération élémentaire	**effet sur le déterminant**
$C_i\longleftrightarrow C_j$ avec $i\neq j$	$\det A'=-\det A$
$C_i\longleftarrow\lambda.C_i$ avec $\lambda\neq 0$	$\det A'=\lambda.\det A$
$C_i\longleftarrow C_i+\lambda.C_j$ avec $i\neq j$	$\det A'=\det A$

7. Le déterminant d'une matrice n'est pas modifié si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres.
8. Attention! La régle dite de Sarrus ne marche pas pour les matrices de taille $n\geqslant 4$

exemple 4:

Calculer $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{vmatrix}$ puis $\det(A)$ avec $A=(\min(i,j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

théorème 1: caractérisation des matrices inversibles à l'aide du déterminant

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{A \text{ est une matrice inversible ssi } \det A \neq 0} \text{ et dans ce cas } \boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}}$$

théorème 2: déterminant d'un produit

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\boxed{\det(AB) = \det A . \det B}$

rem: et donc on a en particulier $\det(AB) = \det(BA)$

théorème 3:

Deux matrices semblables ont le même déterminant

théorème 4: déterminant de la transposée - admis

Une matrice et sa transposée ont même déterminant.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det A = \det(A^T)}$$

méthode 2: mêmes règles de calcul vis-à-vis des lignes!

1. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes
2. Notons A' la matrice obtenue à partir de A en effectuant une transformation élémentaire.

type d'opération élémentaire	effet sur le déterminant
$L_i \longleftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$	$\det A' = -\det A$
$L_i \longleftarrow \lambda . L_i$ avec $\lambda \neq 0$	$\det A' = \lambda . \det A$
$L_i \longleftarrow L_i + \lambda . L_j$ avec $i \neq j$	$\det A' = \det A$

théorème 5: développement par rapport à une ligne ou une colonne (admis)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Formule de développement par rapport à la j-ème colonne:

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}}$$

2. Formule de développement par rapport à la i-ème ligne:

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}}$$

où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en supprimant la $i-$ème ligne et la $j-$ème colonne.

exemple 5: compléter les trous

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & c \\ 0 & d & e & f \\ g & h & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \quad . \quad \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix}$$

exemple 6:

Calculer $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 10^{100} & 0 \\ 1 & 1 & 3^{50} & 1 \\ 2 & 4 & 5^{45} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $B = \begin{vmatrix} 8000 & 5000 & 3000 \\ 200 & 100 & 300 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

exemple 7: matrice antisymétrique d'ordre impair

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique avec n entier impair.
Montrer que A n'est pas une matrice inversible.

exemple 8: déterminants tridiagonaux

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note $D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 1 & -1 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}_n$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $D_{n+2} = D_{n+1} + 2D_n$
2. En déduire l'expression de D_n en fonction de n

définition 2: polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de la matrice A le déterminant de la matrice $X.I_n - A$. On le note χ_A. On a donc $\boxed{\chi_A(X) = \det(X.I_n - A)}$

2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Dans ce paragraphe, E désignera un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie $n \geqslant 2$.

définition 3:

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle déterminant de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$,
et on note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$, le déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})$.

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n})) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))}$$

rem: on a en particulier $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$

exemple 9:

Soit $E=\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base quelconque de E.
On considère la famille de vecteurs $\mathcal{F}=(\vec{i}+2\vec{j},2\vec{j}+\vec{k},\vec{k})$.
Calculer le déterminant de cette famille de vecteurs dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base $\mathcal{B}'=(\vec{k},2\vec{j},\vec{i})$

remarque 1

Le déterminant d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ se calcule toujours ***relativement à une base donnée:*** *si on change cette base, la même famille de vecteurs $\mathcal{F}$ aura un déterminant différent.*
Cependant le théorème ci-dessous indique que si la famille $\mathcal{F}$ a un déterminant nul dans une base donnée alors elle aura un détermiannt nul dans n'importe quelle autre base! (remarquable non?)

théorème 6: caractérisation des bases

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}=(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})$ une famille de n vecteurs de E.
On a l'équivalence entre:

i) $(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})$ est une base de E.

ii) $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n})\neq 0$

ce qui est remarquable dans le théorème ci-dessus, c'est que la nullité du déterminant d'une famille de vecteurs ne dépend pas de la base dans laquelle le déterminant est calculé

démonstration:

On a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \text{ est une base de } E &\Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ est une matrice inversible}\\ &\Longleftrightarrow \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))\neq 0\\ &\Longleftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\neq 0\end{aligned}$$

exemple 10:

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux, et $(\vec{i},\vec{j})$ une base quelconque de E.
Soit a un réel quelconque. Considérons les vecteurs $\vec{v}_1=a.\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{v}_2=(a-1)\vec{i}+(2a+1)\vec{j}$.
Nous allons montrer que $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ est toujours une base de E.

- *On commence par écrire la matrice de la famille de vecteurs $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ dans la base $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j})$.*
  On trouve $Mat_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\begin{pmatrix}a & a-1\\ 1 & 2a+1\end{pmatrix}$
- *On calcule le déterminant de cette matrice, on trouve $2a^2+1$. Comme ce déterminant n'est jamais, nul d'après le théorème précédent, on peut affirmer que $(v_1,\vec{v}_2)$ est une base de E*
- *A noter que si le corps avait été $\mathbb{C}$ la famille $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ n'aurait pas toujours été une base!*

exemple 11:

On note $E=\mathbb{R}_3[X]$.
Soit a un réel.
On considère la famille de polynôme $\mathcal{F}=(X^3+X^2+X+1,aX^2+X+1,2X^2+2X+a,X+1)$

1. Ecrire la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base canonique de E.
2. Donner une cns sur a pour que $\mathcal{F}$ soit une base de E

remarque 2 (***interprétation géométrique dans le plan***)

Soit $E = \mathbb{R}^2$ *muni de son produit scalaire, et* $\mathcal{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$

- $\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ *est égal à l'aire algébrique du parallélogramme construit sur* $\vec{v}_1$ *et* $\vec{v}_2$.
- *ce déterminant n'est rien d'autre que le produit mixte vu en première année:*

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1,\vec{v}_2) = [\vec{v}_1,\vec{v}_2] = ||\vec{v}_1||.||\vec{v}_2||.\sin(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$$

remarque 3 (***interprétation géométrique dans l'espace***)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ *muni de son produit scalaire, et* $\mathcal{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$

- $\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ *est égal au volume algébrique du parallélépipède construit sur* $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ *et* $\vec{v}_3$.
- *ce déterminant n'est rien d'autre que le produit mixte vu en première année:*
$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3) = [\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3] = (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2).\vec{v}_3$$
- *En développant par rapport à la troisième colonne le déterminant on aboutit à la formule ci-dessus.*

3 Déterminant d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe, E désignera un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie $n \geqslant 2$, et u un endomorphisme de E.

définition 4: définition-théorème

On appelle déterminant de l'endomorphisme u le déterminant commun à toutes les matrices associées à u. On le note $\det u$

méthode 3: calculer le determinant d'un endomorphisme

On commence par écrire une matrice associée à l'endomorphisme puis on calcule le déterminant de cette matrice.

Exemple:

On considère $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & (X+1)P'(X) + P(X) \end{array}}$

- *On écrit une matrice associée à u: par exemple* $\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- *On a donc* $\det u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

exemple 12:

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\boxed{\begin{array}{llll} u: & E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & (7x-6y,9x-8y) \end{array}}$

On note $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j})$ la base canonique de E, et $\mathcal{B}' = (\vec{i}+\vec{j},2\vec{i}+3\vec{j})$ une autre base.

1. Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ puis celle dans la base $\mathcal{B}'$
2. Calculer le déterminant de ces deux matrices

proposition 1 (***proposition faisant le lien entre les différentes notions de déterminants***)

Pour toute base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ de E, on a

$$\boxed{\det(u) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(u)) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(u(\vec{e}_1),\dots,u(\vec{e}_n))}$$

exemple 13: déterminant des endomorphismes usuels

E étant un espace vectoriel de dimension n, montrer

i) le déterminant de l'endomorphisme identité vaut 1 . $\boxed{\det(id) = 1}$

ii) le déterminant de l'homothétie de rapport λ vaut λ^n. $\boxed{\det(\lambda id) = \lambda^n}$

iii) le déterminant d'un projecteur est nul

iv) le déterminant d'une symétrie vectorielle vaut ± 1
En effet, soit u une symétrie vectorielle. On a donc $u \circ u = id$.
D'où $\det(u \circ u) = 1$, or $\det(u \circ u) = (\det u)^2$. Ainsi, $(\det u)^2 = 1$. cqfd!
D'une manière plus générale, si u est la symétrie vectorielle par rapport à F_1 et parallèlement à F_2 alors $\boxed{\det(u) = (-1)^{\dim F_2}}$

théorème 7:

Soient u et v deux endomorphismes de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$

i) $\boxed{\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)}$

ii) $\boxed{\det(\lambda u) = \lambda^n \det u}$

théorème 8: Caractérisation des automorphismes

Soit u un endomorphisme de E. Alors, on a :

i) u est bijectif $\Longleftrightarrow \det(u) \neq 0$

ii) et dans ce cas, $\boxed{\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}}$

remarque 4

le déterminant est un outil parfois efficace et rapide pour déterminer si un endomorphisme (d'un espace vectoriel de dimension finie...) est bijectif ou pas. Cependant, <u>montrer que le noyau est réduit au vecteur nul</u> est le plus souvent ce qui permet de conclure rapidement si un tel endomorphisme est bijectif ou pas(via un théorème classique).

définition 5: polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle <u>polynôme caractéristique de l'endormorphisme f</u> le déterminant de l'endomorphisme $Xid_E - f$. On le note χ_f. On a donc $\boxed{\chi_f(X) = \det(Xid_E - f)}$

4 Système linéaire et matrice (rappels)

- on considère le système de n équations et p inconnues suivant :

$$\boxed{(S) \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p & = b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p & = b_n \end{cases} \quad \text{les inconnues étant les } x_i}$$

- on appelle solution du système tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ satisfaisant les n équations du système (S).
- on dit que le système est compatible lorsqu'il possède au moins une solution.
- on dit que le système est homogène lorsque $b_1 = \cdots = b_n = 0$
- on appelle système homogène associé au système (S) le système (H) suivant

$$\boxed{(H) \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p & = 0 \\ \dots\dots\dots & \dots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p & = 0 \\ \dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p & = 0 \end{cases}}$$

- la matrice $\boxed{A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ est appelée matrice du système (S)
- on note souvent $\boxed{B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ la matrice colonne du second membre.
- Le système (S) s'écrit matriciellement $\boxed{A.X = B}$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ comme inconnue
- la matrice $\boxed{A' = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})}$ est appelée matrice complète du système ou matrice augmentée

proposition 2 (*Ecriture vectorielle du système*)

Notons $C_1, \dots, C_p$ les vecteurs colonnes de A et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. (Ce sont des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.)

i) Le système (S) s'écrit vectoriellement de la manière suivante $x_1.C_1 + \cdots + x_p.C_p = B$
ii) (S) est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{vect}(C_1, \dots C_p)$

Il suffit de se rappeler que $\mathrm{vect}(C_1, \dots C_p)$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $C_1, \dots, C_p$ c'est à dire précisément $\boxed{\mathrm{vect}(C_1, \dots, C_p) = \{x_1.C_1 + \cdots + x_p.C_p | (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p\}}$
d'où l'équivalence:

$$B \in \mathrm{vect}(C_1, \dots C_p) \iff \exists\, (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p, x_1.C_1 + \cdots + x_p.C_p = B$$

exemple 14: écriture vectorielle, écriture matricielle d'un système

Considérons le système (S) : $\begin{cases} 2x+3y &= 5 \\ x+y &= 4 \end{cases}$. On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

- La matrice augmentée du système est $(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$
- (S) s'écrit vectoriellement $x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$
- (S) s'écrit matriciellement $A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B$

exemple 15:

Soit la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Ecrire le système associé et montrer qu'il est incompatible

Solution:

- *le système associée est* $\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ 2x+y+2z &= -1 \\ x+z &= 3 \end{cases}$
- *On remarque qu'en sommant la première et la troisième équation on obtient* $2x+y+2z=0$ *qui est clairement incompatible avec la deuxième.*
  Le système ne possède pas de solution.

4.1 Opérations élémentaires sur les lignes

On rappelle que les opérations (ou transformations)élémentaires sur les lignes d'une matrice ou les équations d'un sytème linéaire sont les suivantes :"

- les transpositions : échange de deux lignes (codage $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$)
- les dilatations : multiplication d'une ligne par un scalaire non nul (codage $L_i \leftarrow \lambda L_i$)
- les tranvections : addition d'un multiple d'une ligne à une autre (codage $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j, i \neq j$)

rem :il existe des opérations sur les lignes qui ne sont pas élémentaires mais qui peuvent se décomposer en une succession d'opérations élémenataires(Attention à l'ordre!)
Exemple:
L'opération $L_2 \leftarrow 3L_2 + 5L_1$ *n'est pas élémentaire mais peut se décomposer en une dilatation* ($L_2 \leftarrow 3L_2$) *suivie d'une transvection* ($L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1$)

définition 6: matrices équivalentes par lignes, systèmes linéaires équivalents

- Deux systèmes linéaires sont dits équivalents si l'un se déduit de l'autre par une suite finie de transformations élémentaires sur les lignes
- Deux matrices A et A' sont dites équivalentes par lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie de transformations élémentaires sur les lignes. On écrit $A \underset{L}{\sim} A'$

remarque 5

1. *La relation* $A \underset{L}{\sim} A'$ *est une relation déquivalence, c'est à dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive*
2. *Si une transformation élémentaire transforme (S) en (S') alors elle transforme la matrice augmentée* $(A|B)$ *de (S) en la matrice augmentée* $(A'|B')$ *de (S')*
   De même pour une suite finie de transformations élémentaires
   On comprend qu'il s'agit de faire les mêmes opérations sur les coefficients à la seule différence qu'avec le système, on écrit les inconnues, avec la matrice augmentée, on ne les écrit pas. Comme l'illustre l'exemple ci-dessous:

exemple 16:

On considère le système (S) : $\begin{cases} x+2y &= 4 \\ 3x+8y &= 0 \end{cases}$.

La matrice augmentée est $(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Lorsque l'on effectue la transformation élémentaire $L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1$,

on obtient le système (S') : $\begin{cases} x+2y &= 4 \\ \quad 2y &= -12 \end{cases}$

et la matrice augmentée $(A'|B') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -12 \end{pmatrix}$

Lorsque l'on effectue la transformation élémentaire $L_2 \longleftarrow \frac{1}{2}L_2$,

on obtient le système (S'') : $\begin{cases} x+2y &= 4 \\ \quad y &= -6 \end{cases}$

et la matrice augmentée $(A''|B'') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

théorème 9:

Deux systèmes linéaires sont équivalents ssi ils possèdent le même ensemble de solutions

Une méthode de résolution, méthode(partielle) dite du pivot de Gauss , consiste alors à effectuer des transformations élémentaires afin d'aboutir à un système équivalent(triangulaire) simple à résoudre

Dans l'exemple ci-dessus, on en déduit par exemple que le système (S) : $\begin{cases} x+2y &= 4 \\ 3x+8y &= 0 \end{cases}$ *possède une unique solution* $(x = 4 - 2 \times (-6) = 16, y = -6)$

définition 7:

1. Une matrice A est dite échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
   (a) Si une ligne est nulle, toute les lignes suivantes le sont aussi
   (b) A partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente

   Autrement dit, une matrice est dite échelonnée par lignes lorsque le nombre de coefficients nuls qui commencent chaque ligne augmente strictement d'une ligne à l'autre (pour éventuellement finir sur des lignes dont tous les coefficients sont nuls)
2. On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle

3. Une matrice échelonnée par lignes est dite échelonnée réduite par lignes si elle est nulle ou si tous ses pivots valent 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne

exemple 17:

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ \boxed{1}&0&1&2&0\\0&0&2&3&4\\0&0&0&4&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&\boxed{2}&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&1\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$
n'est pas échelonnée par lignes car la deuxième ligne n'est pas en décalage par rapport l̀a première	est échelonnée mais pas échelonnée réduite car les pivots ne sont pas tous égaux à un	est échelonnée réduite

De façon générale pour avoir une matrice échelonnée, il faut que les pivots fassent un escalier descendant vers la droite

exemple 18: classification des matrices échelonnées par lignes

Dans ce qui suit, on utilise la légende suivante $\begin{cases} * & \text{désigne un nombre non nul} \\ - & \text{désigne un nombre quelconque}\end{cases}$

- matrices échelonnées par lignes du type 2×3:

$$\begin{pmatrix}*&-&-\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}*&-&-\\0&*&-\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}*&-&-\\0&0&*\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&*&-\\0&0&*\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&*&-\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

- matrices échelonnées réduites par lignes 2×3:

$$\begin{pmatrix}1&-&-\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&-\\0&1&-\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&-&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&-\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

- matrices échelonnées par lignes du type 3×3:

$$\begin{pmatrix}*&-&-\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}*&-&-\\0&*&-\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}*&-&-\\0&0&*\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}*&-&-\\0&*&-\\0&0&*\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&*&-\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&*&-\\0&0&*\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

- matrices échelonnées réduites par lignes du type 3×3:

$$\begin{pmatrix}1&-&-\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&-\\0&1&-\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&-&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&-\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

théorème 10: Algorithme de Gauss-Jordan

Toute matrice A de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes

Ce théorème nous permet de dire qu'un système linéaire est toujours équivalent à un système linéaire très très simple à résoudre

exemple 19:

- Déterminons la matrice échelonnée réduite par lignes de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$
- On effectue successivement les opérations suivantes:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \quad , \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \quad , \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

- Ce qui donne successivement:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

- La m.e.r.p.l de A est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$
- Dans le théorème ci-dessus nous assure que si l'on avait effectué d'autres transformations élémentaires sur les lignes pour obtenir une matrice réduite, on aurait trouvé la même!
- Ce que l'on vérifie sur l'exemple suivant. Les transformations ci-dessous ...

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad , \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \quad , \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \quad , \quad L_2 \leftarrow \frac{-3}{2}L_2 \quad , \quad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{8}{3}L_2$$

- ... donnent successivement les matrices

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

- Au final, on aboutit bien à la même m.e.r.p.l
- Anticipons le paragraphe suivant sur les systèmes linéaires...
  1. Le système $\begin{cases} x + 2y + 4z & = 0 \\ 3x + 8y & = 0 \end{cases}$ équivaut au système $\begin{cases} x + \quad 16z & = 0 \\ \quad y - 6z & = 0 \end{cases}$
     - Ce système est de rang deux:
       x et y sont les <u>inconnues principales</u> et z est une <u>inconnue secondaire.</u>
       (Les inconnues principales s'expriment en fonction des inconues secondaires)
     - La solution générale du système est $(x,y,z) = (-16z,6z,z) = z(-16,6,1)$ avec $z \in \mathbb{K}$
  2. Le système $\begin{cases} x + 2y & = 4 \\ 3x + 8y & = 0 \end{cases}$ équivaut au système $\begin{cases} x & = 16 \\ \quad y & = -6 \end{cases}$
     - Ce système est de rang deux: x et y sont les inconnues principales (et il n'y a pas d'inconnues secondaires)
     - Il existe une unique solution au système $(x,y) = (16, -6)$
     - *Dans ce deuxième cas, la matrice A a été vue comme une matrice augmentée.*

4.2 Résolution d'un système linéaire

- Soit (S) un système de n équations à p inconnues, de matrice augmentée $(A|B)$.
- Notons r rang du système, càd le rang de la matrice A.

théorème 11: structure de l'ensemble des solutions d'un syst. linéare

i) L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues et de rang r est un espace vectoriel de dimension $p-r$ *(c'est le nombre d'inconnues secondaires!)*
rem: le nombre d'équations n'intervient pas dans la dimension...

ii) **Si le système (S) est compatible**, la solution générale de (S) s'écrit comme la somme d'une solution particulière (de (S)) et de la solution générale du système homogène associé
(remarque: un système avec second membre peut être incompatible!)

exemple 20: un système sans condition de compatiblité

Considérons une système (S) à 4 inconnues qui après une succession de transformations élémentaires judicieuses est équivalent à (S') : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boxed{x} & & & & & + & 2t & = & 1 \\ & & \boxed{y} & + & z & & & = & 0 \\ & & & & & & \boxed{t} & = & 2 \end{array}\right.$

- Le système est de rang 3 car il y a trois pivots
- Les inconnues principales sont x, y et t.
- Il y a une seule inconnue secondaire : z
- en remontant on a comme système équivalent $\begin{cases} x & = -3 \\ y & = -z \\ t & = 2 \end{cases}$
- l'ensemble des solutions est $\boxed{\{(-3, -z, z, 2) | z \in \mathbb{R}\}}$

exemple 21: un système avec condition de compatiblité (ou plutôt d'incompatibilité!)

Considérons un système (S) équivalent au système (S') : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} \boxed{x} & & & & & + & 2t & = & 1 \\ & & \boxed{y} & + & z & & & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 2 \end{array}\right.$

- Le système est de rang deux
- Les inconnues principales sont x et y
- Les inconnues secondaires sont z et t
- La condition de compatibilité est $\boxed{0 = 2}$
- Le système n'est donc pas compatible: l'ensemble des solutions est vide!

théorème 12: cas d'un système carré

Lorsque A est une matrice carrée, on a l'équivalence suivante

$$\text{Le système possède une unique solution} \iff A \text{ est inversible} \iff \det A \neq 0$$

et dans ce cas, $X = A^{-1}.B$.
Un tel système est appelé un système de Cramer

exemple 22: un exemple avec un paramètre

On considère le système $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+z &= 2 \\ 2x+3y+2z &= a \end{cases}$ avec a paramètre réel.

- La matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & a \end{array}\right)$
- Par transformations élémentaires on arrive à la matrice réduite $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{array}\right)$
- Le système est de rang deux: x et y sont les inconnues principales, z est inconnue secondaire
- La condition de compatibilité est $a-3=0$
  i) si $a \neq 3$ le système est incompatible
  ii) si $a=3$ le système est compatible et possède une infinité de solutions:

$$(x,y,z) = (-z,1,z) = (0,1,0) + z(-1,0,1) \text{ avec } z \in \mathbb{R}$$

- Interprétation géométrique:
  chaque équation est l'équation d'un plan affine dans l'espace; le système caractérise l'intersection des 3 plans.
  i) si $a \neq 3$ les 3 plans sont deux à deux sécants. Mais ils ne sont pas concourants en un même point
  ii) si $a=3$ l'intersection des 3 plans est une droite

- *remarque: comme le système est un système carré, et qu'il n'y a pas unicité de la solution (que $a=3$ ou $a \neq 3$), on peut en déduire alors que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible et que son déterminant vaut zéro!*
- *remarque: si au lieu de travailler avec des transformations élémentaires, on avait calculer* $\det(A)$*, on aurait évidemment trouver qu'il était nul. On pouvait alors seulement affirmer que le système n'était pas un système de Cramer, càd que son ensemble de solutions était soit vide, soit infini.*

exemple 23: cas où d'un système de 2 équations à 2 inconnues : interprétation géométrique

On considère le système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ avec $(a,a') \neq (0,0)$

- interprétation géométrique :
  - Si $(a,b) \neq (0,0)$ l'équation $ax+by=c$ est l'équation d'une droite D_1 dans le plan, de même si $(a',b') \neq (0,0)$ l'équation $a'x+b'y=c'$ est l'équation d'une droite D_2 dans le plan
  - Si $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$ les droites sont sécantes donc possède un unique point d'intersetion
  - Si $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$ les droites sont parallèles
    - parallèles distinctes si $ac' \neq ca'$
    - parallèles confondues si $ac' = ca'$