Révisions de 1ère année
Applications linéaires

Serge Lemarquis

Table des matières

$\mathbb{K}$ désignera comme toujours le corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Avertissement:

– Dans les espaces de fonctions, on se souviendra toujours que la fonction est nommée par son nom usuel ou par une seule lettre (par exemple f), et non pas par $f(x)$ (qui correspond à l'image de x par la fonction f)

– Par exemple, la fonction sinus sera notée $\boxed{\sin}$ et elle correspond à $\boxed{\begin{array}{rcl} \sin : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}}$

– Ainsi le sev $\boxed{\mathrm{vect}(\sin, \cos, \exp)}$ correspond à l'ensemble des fonctions de la forme

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\sin(x) + b\cos(x) + c.e^x \end{array}} \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

– En revanche, on rappelle qu'un polynôme peut s'écrire aussi bien P que $P(X)$

1 Applications linéaires

définition

Soient E et G deux espaces vectoriels sur le le corps $\mathbb{K}$, et f une application de $E \longrightarrow G$.
On dit que f est une application linéaire lorsque

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$$

remarque 1

On a comme définitions équivalentes

- *f est une application linéaire lorsque*

$$\forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \text{ on a } \begin{cases} f(\vec{x}+\vec{y}) & = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ f(\lambda\vec{x}) & = \lambda f(\vec{x}) \end{cases}$$

- *f est une application linéaire lorsque*

$$\forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, f(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

remarque 2

si f est une application linéaire alors on a toujours

- $f(\vec{0}) = \vec{0}$ *et pour tout* $\vec{x} \in E$ *on a* $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$
- *ainsi que*

$$f(\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{x}_n) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \ldots + \lambda_n f(\vec{x}_n)$$

exemple 1: application définie sur un ev de fonctions I

On note $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} T : E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f'' + f \end{array}}$

Montrons que T est une application linéaire
Soient f_1 et f_2 deux éléments de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$
On a par **linéarité de la dérivation**

$$\begin{aligned} T(\lambda.f_1 + f_2) &= (\lambda.f_1 + f_2)'' + (\lambda.f_1 + f_2) \\ &= \lambda.f_1'' + f_2'' + \lambda.f_1 + f_2 \\ &= \lambda.(f_1'' + f_1) + f_2'' + f_2 = \lambda.T(f_1) + T(f_2) \end{aligned}$$

exemple 2: application définie sur un ev de polynômes

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\boxed{\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & E \\ & P = P(X) & \longmapsto & P(-X) \end{array}}$

Montrons que f est une application linéaire.
Soient P_1 et P_2 deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $f(\lambda.P_1 + P_2) = (\lambda.P_1 + P_2)(-X) = \lambda.P_1(-X) + P_2(-X) = \lambda.f(P_1) + f(P_2)$

exemple 3: application définie sur un ev de suites

On note $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\boxed{\begin{array}{llcl} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ & u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0,u_1) \end{array}}$

Montrons que l'application f est une application linéaire.
Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de E. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

- Considérons $w = \lambda.u + v$.
  Il s'agit de la suite $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \geqslant 0, w_n = \lambda.u_n + v_n$
- On a ainsi $f(\lambda.u + v) = f(w) = (w_0,w_1) = (\lambda.u_0 + v_0,\lambda.u_1 + v_1)$
- Or $(\lambda.u_0 + v_0,\lambda.u_1 + v_1) = \lambda.(u_0,u_1) + (v_0,v_1) = \lambda.f(u) + f(v)$
- On a bien $f(\lambda.u + v) = \lambda.f(u) + f(v)$

exemple 4: application définie sur un ev de fonctions II

On note $E = C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\boxed{\begin{array}{lcl} T: E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & g=T(f) \end{array}}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f''(t) + f(t^2)$

Montrons que T est une application linéaire.
Soient f_1 et f_2 deux éléments de E, et $\lambda \in \mathbb{K}$

- Considérons $f_3 = \lambda.f_1 + f_2$
  Il s'agit de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_3(t) = \lambda.f_1(t) + f_2(t)$
- Notons $g_1 = T(f_1), g_2 = T(f_2)$ et $g_3 = T(f_3)$
  On a par linéarité de la dérivation

  $$\forall t \in \mathbb{R}, g_3(t) = f_3''(t) + f_3(t^2) = (\lambda.f_1 + f_2)''(t) + (\lambda.f_1 + f_2)(t^2) = \lambda.f_1''(t) + f_2''(t) + \lambda.f_1(t^2) + f_2(t^2)$$

  ce qui devient $\forall t \in \mathbb{R}, g_3(t) = \lambda.(f_1''(t) + f_1(t^2)) + (f_2''(t) + f_2(t^2)) = \lambda.g_1(t) + g_2(t)$
  On a prouvé que $g_3 = \lambda.g_1 + g_2$ càd que $T(\lambda.f_1 + f_2) = \lambda.T(f_1) + T(f_2)$

définition

- lorsque $f : E \to E$ on dit que $\underline{f \text{ est un endomorphisme de } E}$
- lorsque $f : E \to G$ et f est bijective, on dit que $\underline{f \text{ est un isomorphisme de } E \text{ sur } G}$
- lorsque $f : E \to E$ et f est bijective, on dit que $\underline{f \text{ est un automorphisme de } E}$

remarque 3

On note :

- $\boxed{\mathcal{L}(E,G)}$ *l'ensemble des applications linéaires de $E \to G$*
- $\boxed{\mathcal{L}(E)}$ *l'ensemble des endomorphismes de E*
- $\boxed{GL(E)}$ *l'ensemble des automorphismes de E, on l'appelle le groupe linéaire de E*

théorème 1: composée d'applications linéaires

1. la composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire.
2. la réciproque d'une application linéaire bijective est encore une application linéaire.

démonstration 1

1. *Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.*
   Notons $h = g \circ f$, et montrons que h est une application linéaire.
   Soit $(\vec{x},\vec{y},\lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}$.
   On a

$$\begin{aligned} h(\lambda.\vec{x}+\vec{y}) &= g(f(\lambda.\vec{x}+\vec{y})) \\ &= g(\lambda f(\vec{x})+f(\vec{y})) && \textit{par linéarité de } f \\ &= \lambda g(f(\vec{x}))+g(f(\vec{y})) && \textit{par linéarité de } g \\ &= \lambda h(\vec{x})+h(\vec{y}) \end{aligned}$$

théorème 2:

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev

1. $(\mathcal{L}(E,F),+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$
2. L'ensemble des endomorphismes de E, càd $\mathcal{L}(E)$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, stable par la loi $\circ$
3. L'ensemble des automorphismes de E, càd $GL(E)$, est stable par la loi $\circ$ et par passage à l'inverse. On dit encore que $(GL(E),\circ)$ est un groupe (HP)

dire que $(GL(E),\circ)$ est un groupe signifie que :

i) la composée de deux éléments de $GL(E)$ est encore un élément de $GL(E)$

ii) l'inverse d'un élément de $GL(E)$ est encore un élément de $GL(E)$

iii) id_E est un élément de $GL(E)$

pour $(f,g) \in GL(E)$, on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

remarque 4 (*à propos des endomorphismes*)

Nous allons surtout nous intéresser aux endomorphismes de E dans les prochains chapitres. On retiendra donc que toute combinaison linéaire d'endomorphismes de E est encore un endomorphisme de E, et que la composée de deux endomorphismes de E est encore un endormorphisme de E.
En revanche une combinaison linéaire d'automorphismes de E n'est pas nécessairement un automorphisme de E

proposition 1 (*règles de calcul*)

– *si f, g, h sont des applications linéaires et si les compositions sont possibles (càd que les espaces de départ et d'arrivées respectifs sont compatibles) alors*

  $f \circ (\lambda.g+h) = \lambda.f \circ g + f \circ h$ *et* $(\lambda.g+h) \circ f = \lambda.g \circ f + h \circ f$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$

– *si f est un endomorphisme de E, on note $f^0 = id_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$*

– *si f est un automorphisme de E, on note pour $k \leqslant 1, f^k = (f^{-1})^{-k} = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{-k \text{ fois}}$*

– *si f et g sont 2 endomorphismes de E tels que : $\underline{f \circ g = g \circ f}$ alors*

  i) $\forall p \in \mathbb{N}, \quad (f+g)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^k \circ g^{p-k}$ *(formule du binôme de Newton(important))*

  ii) $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad f^p - g^p = (f-g) \circ (\sum_{k=0}^{p-1} f^k \circ g^{p-k-1})$ *(moins important à retenir)*

– *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes alors $g \circ f$ est un isomorphisme et* $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$

2 Noyau, ensemble image

définition

Soit f une application linéaire de $E \to G$.

1. On appelle noyau de f, et on note $\ker(f)$, l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ de E tels que $f(\vec{x}) = \vec{0}$.

$$\ker(f) = \{\vec{x} \in E \,|\, f(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

2. On appelle ensemble image de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble des éléments de G qui possèdent au moins un antécédent par f

$$\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in G, \,|\, \exists \,\vec{x} \in E, f(\vec{x}) = \vec{y}\} = \{f(\vec{x}) \,|\, \vec{x} \in E\}$$

théorème 3:

Soit f une application linéaire de $E \to G$.

1. $\ker(f)$ est un sev de E
2. $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de G

démonstration 2

1. – *par définition,* $\ker(f) \subset E$
   – $\vec{0} \in \ker(f)$ *car comme* f *est linéaire, on a* $f(\vec{0}) = \vec{0}$
   – $\ker(f)$ *est stable par combinaison linéaire.*
   Soient $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\mathbb{K}) \in \ker(f) \times \ker(f) \times \mathbb{K}$.
   On a ainsi $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) = \vec{x}_2$ *et grâce à la linéarité de* f*, on peut écrire*

$$f(\lambda.\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda.f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = \lambda.\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

   ce qui prouve que $\lambda.\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \ker(f)$
2. – *par définition* $\mathrm{Im}(f) \subset G$
   – $\vec{0} \in \mathrm{Im}(f)$ *car comme* f *est linéaire, on a* $f(\vec{0}) = \vec{0}$
   – $\mathrm{Im}(f)$ *est stable par combinaison linéaire.*
   Soient $(\vec{y}_1,\vec{y}_2,\mathbb{K}) \in \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Im}(f) \times \mathbb{K}$.
   Comme $\vec{y}_1 \in \mathrm{Im}(f)$*, on sait qu'il existe* $\vec{x}_1$ *tel que* $f(\vec{x}_1) = \vec{y}_1$.
   Comme $\vec{y}_2 \in \mathrm{Im}(f)$*, on sait qu'il existe* $\vec{x}_2$ *tel que* $f(\vec{x}_2) = \vec{y}_2$.
   On a donc par linéarité de f

$$\lambda.\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = \lambda.f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) = f(\lambda.\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$$

   Comme E *est un sev et que* $\vec{x}_1$ *et* $\vec{x}_2$ *sont deux éléments de* E*, on peut affirmer que* $\lambda.\vec{x}_1+\vec{x}_2 \in E$.
   En notant $\vec{x}_3$ *ce dernier vecteur, on a bien montré qu'il existe* $\vec{x}_3$ *tel que* $\lambda.\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = f(\vec{x}_3)$

méthode 1: comment déterminer le noyau

Pour déterminer $\ker(f)$ on résout tout simplement l'équation $f(\vec{x}) = \vec{0}$

exemple 5:

Soit $\boxed{\begin{array}{llcl} f: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & aX^3+bX^2+cX+d & \longmapsto & (a, b-c, c-d, d-b) \end{array}}$

1. Noyau de f.
   Soit $P = aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} P = aX^3+bX^2+cX+d \in \ker(f) &\Longleftrightarrow f(P) = (0{,}0{,}0{,}0) \\ &\Longleftrightarrow (a, b-c, c-d, d-b) = (0{,}0{,}0{,}0) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a & = 0 \\ b = c & = d \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi $\ker(f) = \{bX^2+bX+b | b \in \mathbb{R}\} = \{b(X^2+X+1) | b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(X^2+X+1)$
   On a $\dim \ker(f) = 1$
   rem: en appliquant le théorème du rang à f on trouve déjà que $\dim \mathrm{Im}(f) = 3$
2. Ensemble image de f: première caractérisation

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{f(P) |\, P \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{f(aX^3+bX^2+cX+d) |\, (a{,}b{,}c{,}d) \in \mathbb{R}^4\} \\ &= \{(a{,}b-c{,}c-d{,}d-b) |\, (a{,}b{,}c{,}d) \in \mathbb{R}^4\} \\ &= \{a(1{,}0{,}0{,}0) + b(0{,}1{,}0{,}-1) + c(0{,}-1{,}1{,}0) + d(0{,}0{,}-1{,}1) | (a{,}b{,}c{,}d) \in \mathbb{R}^4\} \\ &= \mathrm{vect}((1{,}0{,}0{,}0), (0{,}1{,}0{,}-1), (0{,}-1{,}1{,}0), (0{,}0{,}-1{,}1)) \\ &= \mathrm{vect}((1{,}0{,}0{,}0), (0{,}1{,}0{,}-1), (0{,}-1{,}1{,}0)) \end{aligned}$$

   car on remarque que $(0{,}0{,}-1{,}1) = -(0{,}-1{,}1{,}0) - (0{,}1{,}0{,}-1)$
   Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}((1{,}0{,}0{,}0), (0{,}1{,}0{,}-1), (0{,}-1{,}1{,}0))}$

   rem: on peut aussi écrire

$$\mathrm{Im}(f) = \{af(X^3) + bf(X^2) + cf(X) + df(1) | (a{,}b{,}c{,}d) \in \mathbb{R}^4\} = \mathrm{vect}(f(X^3){,}f(X^2){,}f(X){,}f(1))$$

   et ainsi retrouver que l'image d'une base est une famille génératrice de l'ensemble image
3. Ensemble image de f: seconde caractérisation

$$\begin{aligned} (x{,}y{,}z{,}t) \in \mathrm{Im}(f) &\Longleftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = (x{,}y{,}z{,}t) \\ &\Longleftrightarrow \exists (a{,}b{,}c{,}d) \in \mathbb{R}^4, f(aX^3+bX^2+cX+d) = (x{,}y{,}z{,}t) \\ &\Longleftrightarrow \exists (a{,}b{,}c{,}d) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} a & = x \\ b-c & = y \\ c-d & = z \\ d-b & = t \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \exists (a{,}b{,}c{,}d) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} a & = x \\ b & = y+c \\ d & = -z+c \\ -z-y & = t \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow -z-y = t \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{(x{,}y{,}z{,}t) \in \mathbb{R}^4 | z+y+t = 0\}}$

exemple 6: retour sur un exemple précédent

On note $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} T : E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f'' + f \end{array}}$

Déterminons le noyau de T.

Soit $f \in E$. On a les équivalences suivantes:

$$f \in \ker(T) \Longleftrightarrow T(f) = 0 \Longleftrightarrow f'' + f = 0 \Longleftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, f = A.\cos + B.\sin$$

Conclusion $\boxed{\ker(f) = \{A.\cos + B.\sin \,|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(\cos, \sin)}$

méthode 2: comment déterminer l'ensemble image de f

Soit $f \in \mathcal{L}(E,G)$.

Pour déterminer $\text{Im}(f)$, il y a deux possibilités

i) On détermine les vecteurs $\vec{y} \in G$ tel que l'équation $f(\vec{x}) = \vec{y}$ possède au moins une solution (voir le point 3 de l'exemple 5)

ii) On utilise une famille génératrice de E. Son image par f est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ (voir le point 3 du même exemple.

théorème 4: démo en exercice

Soit f une application linéaire de $E \to G$, deux sevs.

1. L'image d'un sev de E par f est un sev de G
   si F est un sev de E alors $\boxed{f(F) = \{f(\vec{x}) | \vec{x} \in F\}}$ *est un sev de G.*

2. L'image réciproque d'un sev de G par une application linéaire est un sev de E
   si H est un sev de G alors $\boxed{f^{-1}(H) = \{\vec{x} \in E | f(\vec{x}) \in H\}}$ *est un sev de E*

remarque 5 (***précision importante***)

Attention! Dans le deuxième point du théorème 4, l'application f n'est pas forcément bijective! Il s'agit d'une notation à bien comprendre pour éviter les confusions:

- *lorsque l'on écrit $f^{-1}(\vec{y})$ ceci exige que f soit bijective: $f^{-1}(\vec{y})$ désigne alors l'image du vecteur $\vec{y}$ par la fonction f^{-1}*
- *lorsque l'on écrit $f^{-1}(\{\vec{y}\})$ ceci n'exige pas que f soit bijective: $f^{-1}(\vec{y})$ désigne l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels que $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Dans le cas où $\vec{y}$ ne possède pas d'antécédent par f, on note alors $f^{-1}(\{\vec{y}\} = \emptyset$*
- *lorsque H est un ensemble, et plus particulièrement un sev, et que l'on écrit $f^{-1}(H)$ ceci ne présuppose pas que f soit bijective (c'est à dire que l'application réciproque f^{-1} existe): il s'agit juste d'une notation pour indiquer les vecteurs dont l'image par f est dans H .Pour éviter cette ambiguité, on note parfois $f^{<-1>}(H)$ plutôt que $f^{-1}(H)$.*
  En particulier, $f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{x} \in E | f(\vec{x}) = \vec{0}\}$ est le noyau de f!

3 Equations linéaires

Soient E et G deux ev, ainsi que f une application linéaire de $E \to G$.
On appelle équation linéaire, une équation de la forme $f(u) = a$ où u est l'inconnue (à chercher dans E), et a un vecteur donné (de G).

exemple 7:

Montrer que le système linéaire $\begin{cases} 2x + y & = -1 \\ 3x + 2y & = 2 \end{cases}$ peut s'écrire sous la forme d'une équation linéaire, et donner f, u et a.

Il suffit de considérer $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & 2x + y, 3x + 2y) \end{array}}$ *et* $\boxed{u = (x,y) \text{ et } a = (-1,2)}$

On a alors l'équivalence

$$\begin{cases} 2x + y & = -1 \\ 3x + 2y & = 2 \end{cases} \iff f(u) = a$$

exemple 8: un système d'équation linéaire à n équations et p inconnues est une équation linéaire

- le système $\boxed{\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 & = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = 5 \end{cases}}$ correspond à l'équation linéaire $f(u) = a$ avec $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ & (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & (x_1 + 3x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3) \end{array}}$ et $\boxed{u = (x_1,x_2,x_3) \text{ et } a = (4,5)}$
- Dans le cas général,
  le système $\boxed{\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}}$ correspond à l'équation linéaire $f(u) = a$
  avec $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & (x_1, \dots ,x_p) & \longmapsto & (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p, \dots ,a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p) \end{array}}$

  et $\boxed{u = (x_1, \dots ,x_p) \text{ et } a = (y_1, \dots ,y_n)}$

exemple 9: une équation différentielle linéaire est une équation linéaire.

- L'équation différentielle $\boxed{y'' + 2y' + 4y = \sin(x)}$ correspond à l'équation linéaire $f(u) = a$ avec $\boxed{\begin{array}{rcll} f: C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \text{et } u = y \text{ et } a = \sin \\ y & \longmapsto & y'' + 2y' + 4y & \end{array}}$
- Dans le cas général, α, β, γ et δ étant des fonctions continues sur un intervalle I,
  l'équation différentielle $\boxed{\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x).y = \delta(x) \text{ sur } I}$ correspond à l'équation linéaire $f(u) = a$ avec $\boxed{\begin{array}{rcll} f: C^2(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & C^0(I,\mathbb{K}) & \text{et } u = y \text{ et } a = \delta \\ X & \longmapsto & \alpha.X\text{''} + \beta.X' + \gamma.X & \end{array}}$

On voit sur les exemples précédents qu'il suffit de connaÃ®tre un résultat sur les équations linéaires de la forme $f(u) = a$ pour obtenir des résultats sur des équations qui se présentent a priori sous des formes bien différentes.

théorème 5: solution d'une équation linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,G)$ et $a \in G$.
On considère l'équation linéaire $f(u) = a$ d'inconnue u

1. L'équation a au moins une solution ssi $a \in \mathrm{Im}(f)$
2. si u_0 est une solution particulière, alors

$$\boxed{u \text{ est solution si et seulement si } u \text{ s'écrit } u = u_0 + v \text{ avec } v \in \ker(f)}$$

c'est à dire que la solution générale d'une équation linéaire est donnée par la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre:
on utilise parfois un abus d'écriture en écrivant que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = u_0 + \ker(f) = \{u_0 + v \,|\, v \in \ker(f)\}$$

démonstration 3

Soit f une application linéaire d'un ev E dans un ev G.
Soit a un élément donné de G

1. *trivial*
2. *soit u_0 une solution particulière.*
On a les équivalences suivantes:

$$f(u) = a \iff f(u) = f(u_0) \iff f(u) - f(u_0) = 0 \iff f(u - u_0) = 0 \iff u - u_0 \in \ker(f)$$

Ce qui s'écrit encore

$$f(u) = a \iff u - u_0 \in \ker(f) \iff \exists v \in \ker(f), u - u_0 = v \iff \exists v \in \ker(f), u = u_0 + v$$

4 Applications linéaires définies sur un sev de dimension finie

théorème 6: image d'une famille de vecteurs par une application linéaire.

Soit f une application linéaire de $E \to G$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. Alors:

i) **si** $(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n})$ est une famille liée **alors** $(f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2), \ldots, f(\vec{x}_n))$ est une famille liée.

ii) **si** $(f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2), \ldots, f(\vec{x}_n))$ est une famille libre **alors** $(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n})$ est une famille libre.

iii) **si** $(\vec{x}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille génératrice de E **alors** $(f(\vec{x}_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$

iv) **si** F est un sev de E et **si** $\mathcal{B}$ est une base de F, **alors** $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $f(F)$ (on en déduit donc que $\dim f(F) \leqslant \dim F$)

démonstration 4

Soit f une application linéaire de E dans G.

i) *Soit $(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n})$ une famille liée de E.*
Ceci signifie qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\lambda_1.\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n.\vec{x}_n = \vec{0}$.
En composant chaque membre de cette égalité par l'application f, et en tenant compte de sa linéarité, cela donne $\lambda_1.f(\vec{x}_1) + \cdots + \lambda_n.f(\vec{x}_n) = \vec{0}$.
Comme $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ cette dernière égalité permet d'affirmer que la famille $(f(\vec{x}_1), \ldots, f(\vec{x}_n))$ est une famille liée.

ii) *c'est la contraposée de i)*

iii) *Soit $(\vec{x}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille génératrice de E.*
On a donc $E = \mathrm{vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.
Par linéarité de l'application f on a donc

$$\mathrm{Im}\, f = f(E) = \{f(\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{x}_n) | (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\} = \{\lambda_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{x}_n) | (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

On reconnait alors bien que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{vect}(f(\vec{x}_1), \ldots, f(\vec{x}_n))$

théorème 7: application linéaire entièrement définie sur une base

1. Soient $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ une base de E, et $(\overrightarrow{g_1},\dots,\overrightarrow{g_n})$ une famille de vecteurs de l'espace G. Alors, il existe une unique application linéaire $f : E \to G$ telle que $\forall p \in [\![1,n]\!], f(\vec{e}_p) = \vec{g}_p$
2. Une application linéaire définie sur $E = F_1 \oplus F_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à F_1 et à F_2 (*"si on sait comment f agit sur F_1 et F_2 alors on sait comment f agit sur E."*)

rem: La première proposition signifie, entre autre, qu'une application linéaire définie sur une ev E de dimension finie est entièrement caractérisée par l'image d'une base de E. Ceci est vraiment propre aux applications linéaires : pour n'importe quelle autre application, la connaissance de l'image d'un nombre fini (ou même infini) de correspondances ne permet pas de connaitre complètement l'application.(par exemple il ne suffit pas de savoir que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\sin(k\pi) = 0$ pour avoir une idée de la fonction $\sin$!)

exemple 10:

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère une application linéaire f de $E \to \mathbb{R}[X]$ qui vérifie $\begin{cases} f(1) &= 0 \\ f(X) &= X-1 \\ f(X^2) &= X+1 \end{cases}$.

1. Combien y-a-t-il d'applications linéaires f qui vérifient ces hypothèses?
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$
3. Déterminer l'image par f du polynôme $aX^2 + bX + c$
4. Combien existe-t-il d'application linéaire g définie sur E telles que $\begin{cases} g(1) &= 0 \\ g(X) &= X-1 \end{cases}$?

1. *Comme $(1,X,X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, d'après le théorème précédent, on peut affirmer qu'il existe une unique application linéaire qui vérifie les conditions imposées.*
2. *On sait que l'image d'une base est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, on a donc ici*
$$\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(1),f(X),f(X^2)) = \operatorname{vect}(X-1,X+1)$$
Il est facile de justifier que $\operatorname{vect}(X-1,X+1) = \mathbb{R}_1[X]$, en effet:
   - *On a $\operatorname{vect}(X-1,X+1) \subset \mathbb{R}_1[X]$*
   - *Comme $(X-1,X+1)$ est une famille libre on a $\dim \operatorname{vect}(X-1,X+1) = 2$*
   - *Ainsi $\operatorname{vect}(X-1,X+1) \subset \mathbb{R}_1[X]$ et $\dim \operatorname{vect}(X-1,X+1) = \dim \mathbb{R}_1[X]$.*
   On sait que cela suffit pour affirmer que $\operatorname{vect}(X-1,X+1) = \mathbb{R}_1[X]$
3. $f(a.X^2 + b.X + c) = a.f(X^2) + b.f(X) + c.f(1) = a.(X+1) + b.(X-1) = (a+b).X + a - b$
4. *Une infinité! En effet, toujours d'après le théorème précédent,*
il en existe une qui vérifie $\begin{cases} g(1) &= 1 \\ g(X) &= X-1 \\ g(X^2) &= X+1 \end{cases}$, *une autre qui vérifie* $\begin{cases} g(1) &= 2 \\ g(X) &= X-1 \\ g(X^2) &= X+1 \end{cases}$, *encore une autre qui vérifie* $\begin{cases} g(1) &= 3 \\ g(X) &= X-1 \dots \\ g(X^2) &= X+1 \end{cases}$

méthode 3: comment obtenir une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$

Si $f \in \mathcal{L}(E,G)$ alors l'image d'une base $\mathcal{B}$ de E par f est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
Les coordonnées des vecteurs de cette famille génératrice dans une base $\mathcal{C}$ de G sont les vecteurs colonnes de la matrices de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$

Exemples:

1. *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y+z, x-z) \end{array}$
   L'image d'une base de $\mathbb{R}^3$*, donc par exemple de la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*, par* f *nous donne une famille génératrice de* $\operatorname{Im} f$*. D'où*
   $$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \operatorname{vect}((1,0,1),(1,1,0),(0,1,-1))}$$
2. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$ *dont la matrice dans la base* $(X^2,X,1)$ *est* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
   Comme ceci signifie que
   $$f(X^2) = X^2+3, f(X) = -X^2+X+1 \text{ et } f(1) = 2X^2+X+4$$
   On en déduit que $\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}(X^2+3, -X^2+X+1, 2X^2+X+4)}$
3. *Soit* f *l'application canoniquement associé à la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
   Ceci signifie que f *est l'application linéaire de* $\mathbb{K}^2$ *dans* $\mathbb{K}^3$ *qui possède cette matrice relativement aux bases canoniques de ces deux espaces.*
   On a ainsi $f((1,0)) = (1,0,3)$ *et* $f((0,1)) = (2,1,1)$.
   D'où $\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}((1,0,3),(2,1,1))}$

remarque: comme le montre ces deux exemples, les vecteurs colonnes de la matrices ne sont pas (toujours) des vecteurs d'une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$ *mais les vecteurs colonnes indiquent les coordonnées des vecteurs qui constituent la famille génératrice de* $\operatorname{Im}(f)$
remarque: cependant, lorsque l'on considère l'endomorphisme f ***canoniquement associé à la matrice*** A *alors les vecteurs colonnes de* A *sont les vecteurs qui constituent une famille génératrice de* f*!*

définition

On appelle rang de l'application linéaire f, et on note $\operatorname{rg} f$, la dimension de $\operatorname{Im} f$.
c'est à dire que l'on a $\boxed{\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f)}$

exemple 11:

1. Dans l'exemple 10, le rang de l'application f est égal à 2 car $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathbb{R}_1[X] = 2$
2. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f((1,2,1,0)) = (1,1)$ et $f((0,1,2,3)) = (1,0)$. Déterminer le rang de f.
   - *ce que l'on peut dire déjà, comme* $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$*, c'est que* $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim \mathbb{R}^2 = 2$
   - *De plus* $\operatorname{Im}(f)$ *contient les vecteurs* $(1,1)$ *et* $(1,0)$ *qui sont linéairement indépendants, donc* $\dim \operatorname{Im}(f) \geqslant 2$
   - *Des deux points précédents, on en déduit que* $\operatorname{rg}(f) = 2$.
     et l'on peut alors affirmer de plus que $\operatorname{rg}(f) = \mathbb{R}^2$ *car on sait que* $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ *et que* $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^2$ *!*

théorème 8: caractérisation des applications injectives

Soit f une application linéaire de $E \to G$. Il y a équivalence entre :

i) $\ker f = \{\vec{0}\}$.

ii) f est injective.

les caractérisations suivantes sont hors-programme

iii) pour tout sev F de E, on a $\dim f(F) = \dim F$

iv) $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$

v) pour toute famille libre $(\vec{x}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E, la famille $(f(\vec{x}_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de G

démonstration 5

Soit f une application linéaire de E dans G.

- *On suppose que $\ker f = \{\vec{0}\}$ et on va montrer que f est injective.*
  Soient $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ deux vecteurs de E tel que $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$.
  On peut écrire que $f(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2) = \vec{0}$, et donc que $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \ker f$.
  Mais comme le noyau est réduit au vecteur nul ceci signifie que $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0}$.
  On a bien montré l'implication $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) \Longleftrightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$!
- *On suppose que f est injective et on va montrer que $\ker f = \{\vec{0}\}$*
  Soit $\vec{x} \in \ker f$
  On a donc $f(\vec{x}) = \vec{0}$, mais on a aussi $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
  Ainsi $f(\vec{x}) = f(\vec{0})$! Et par injectivité de f on peut affirmer que $\vec{x} = \vec{0}$.
  On vient de prouver que $\ker f \subset \{\vec{0}\}$
  Comme l'autre inclusion est toujours vraie pour une application linéaire, on en déduit bien que $\ker f = \{\vec{0}\}$

exemple 12:

Etudier l'injectivité de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_[X] \\ P & \longmapsto & XP' - 2P \end{array}$

- il est clair que f est une application linéaire
- déterminons le noyau de f.
  Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$, on a les équivalences suivantes

$$P \in \ker(f) \Longleftrightarrow f(P) = 0 \Longleftrightarrow X.(2aX + b) - 2(aX^2 + bX + c) = 0 \Longleftrightarrow bX - 2c = 0$$

  or on sait qu'un polynôme est le polynôme nul ssi tous ses coefficients sont nuls, ce qui donne l'équivalence

$$P \in \ker(f) \Longleftrightarrow b = c = 0$$

  On trouve donc que $\boxed{\ker(f) = \{aX^2 | a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(X^2)}$
  Comme le noyau n'est pas réduit au vecteur nul, on peut en déduire d'après le théorème précédent que f n'est pas injective.
  remarque: sans déterminer complètement le noyau, si au départ vous aviez remarqué que $f(X^2) = 0$ cela suffisait pour affirmer que f n'était pas injective!

remarque 6 (*injectivité, surjectivité: rappel des définitions*)

Soit f une application de $E \longrightarrow G$. Par définition:

- *f est injective* **lorsque** $\boxed{\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E^2 \,, (f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2)}$
  f est injective lorsque tout élément de G possède au plus un antécédent.
- *f est surjective* **lorsque** $\mathrm{Im}\, f = G$ **càd** $\boxed{\forall \vec{y} \in G \,, \exists \vec{x} \in E \,, f(\vec{x}) = \vec{y}}$
  f est surjective lorsque tout élément de G possède au moins un antécédent.

théorème 9: caractérisation des applications surjectives

Soit f une application linéaire de $E \to G$. Il y a équivalence entre :

i) f est surjective

ii) $\operatorname{Im} f = G$

iii) $\operatorname{rg}(f) = \dim(G)$ (lorsque $\dim G$ est finie bien sûr)

théorème 10: caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Soit f une application linéaire de $E \to G$ avec $\underline{\dim E = \dim G < \infty}$*(hyp. très importante!)*.
Il y a équivalence entre :

i) f est injective ($\iff \ker f = \{\vec{0}\}$)

ii) f est surjective($\iff \operatorname{Im}(f) = G$)

iii) f est bijective (c'est un isomorphisme de E sur G)

iv) l'image d'une base de E par f est une base de G.

v) $\operatorname{rg}(f) = \dim(G) = \dim(E)$

exemple 13:

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ (a,b) & \longmapsto & (a+b)X + (a-b) \end{array}$

Montrer que f est un isomorphisme

- *Il est aisé de vérifier que f est une application linéaire.*
- *Justifions que* $\ker(f) = \{\vec{0}\}$
  Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
  On a les équivalences suivantes

$$(a,b) \in \ker f \Leftrightarrow f(a,b) = 0 \Leftrightarrow (a+b)X + (a-b) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b & = 0 \\ a-b & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

  Ceci prouve bien que $\ker f$ *est réduit au vecteur nul*
- *Comme* $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathbb{R}_1[X] = 2$*, d'après le théorème de caractérisation des isomorphismes en dimension finie on peut alors affirmer que f est bijective*

théorème 11: caractérisation des automorphismes en dimension finie

Soit f un endomorphisme de E avec E un ev de dimension finie*(hyp. très importante!)*.
Il y a équivalence entre :

i) f est injective ($\iff \ker f = \{\vec{0}\}$)

ii) f est surjective($\iff \operatorname{Im}(f) = E$)

iii) f est bijective (c'est un automorphisme de E)

iv) l'image d'une base de E par f est encore une base de E.

v) $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$

rem: ce n'est qu'un cas particulier du théorème précédent!

définition

Soient E et G deux $\mathbb{K}-$ev.
On dit que E et G sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur G.

théorème 12: deux espaces sont isomorphes ssi ils ont même dimension finie

i. tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$
ii. deux ev E et G de dimension finie sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim G$

exemple 14:

Soit $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ & (a,b,c) & \longmapsto & (a+c)X+(c-b+a) \end{array}}$

f est-elle un isomorphisme?

– *Comme* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ *et que* $\dim \mathbb{R}_1[X] = 2$, *l'application* f *ne peut être un isomorphisme!*

théorème 13: théoréme du rang

Soit E un ev de dimension finie, et $f : E \to G$ une application linéaire. Alors :

$$\boxed{\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \ker f + \operatorname{rg} f}$$

Attention! Une faute classique consiste à penser que ce théorème signifie que $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont toujours supplémentaires dans* E*!*

théorème 14: une composition d'applications linéaires n'augmente pas le rang

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors

$$\boxed{\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant min(\operatorname{rg}(g), \operatorname{rg}(f))}$$

théorème 15: invariance du rang par composition par un isomorphisme

Soit f une application linéaire, et g_1 et g_2 deux isomorphismes.
Alors : $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f \circ g_1) = \operatorname{rg}(g_2 \circ f)$
"composer une application par un isomorphisme ne modifie pas son rang"

théorème 16: dimension de $\mathcal{L}(E,G)$

Si E et G sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E,G)$ est aussi un espace vectoriel de dimension finie, et l'on a $\boxed{\dim \mathcal{L}(E,G) = (\dim E) \times (\dim G)}$
En particulier, l'ensemble des endomorphismes de E *est un ev de dimension finie,*

avec $\boxed{\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2}$