SERIES NUMERIQUES

Table des matières

1 Généralités **2**
1.1 définitions 2
1.2 procédé télescopique 4
1.3 exemples de référence 5
1.4 des résultats à avoir en tête 7
1.5 approximation de la somme d'un série convergente 9

2 Séries à termes positifs **11**
2.1 comparaison entre deux séries 12
2.2 comparaison avec une série géométrique 14
2.3 comparaison avec une intégrale 16

3 Quelques considérations importantes **18**

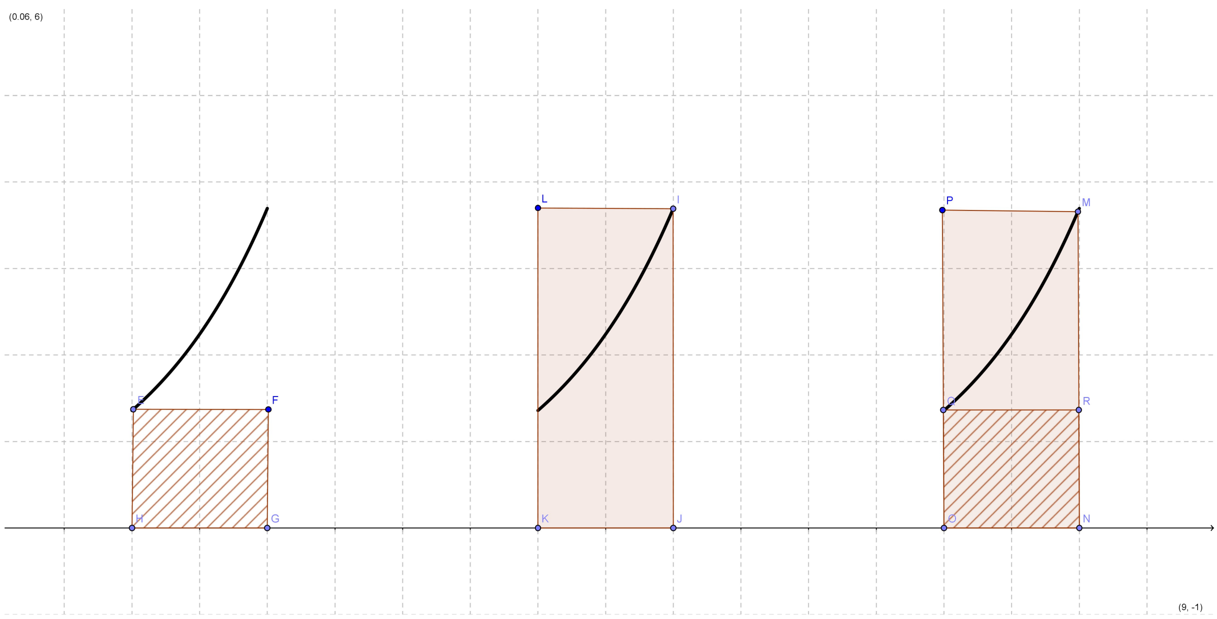
4 Convergence absolue **20**

5 Deux théorèmes Hors-Programme **21**

6 Produit de Cauchy de deux séries numériques **22**

7 Séries alternées (Hors Programme... mais si classique!) **23**

8 D'autres exemples **25**



Dans tout ce chapitre, $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ désignera une suite de nombres réels ou complexes définie à partir du rang n_0. On lui associe une nouvelle suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$

1 Généralités

1.1 définitions

définition 1: sommes partielles

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes définie à partir du rang n_0

1. La quantité $S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ s'appelle la somme partielle d'indice n
2. On appelle série numérique de terme général u_n, et on note $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$.

définition 2: CV, DV, ACV, GDV,... somme d'une série

Soit $\sum u_n$ une série.

i) On dit que la série $\sum u_n$ converge (CV) lorsque la suite des sommes partielles (S_n) converge.

Dans ce cas, on appelle somme de la série $\sum u_n$, et on note $\boxed{\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} u_k}$ ou $\boxed{\sum\limits_{n_0}^{\infty} u_k}$, la limite de la suite des sommes partielles

$$\sum_{n_0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

ii) Dans le cas contraire, on dit que la série de terme général u_n diverge (DV)

iii) On dit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente (GDV) lorsque son terme général ne tend pas vers 0, càd la suite (u_n) ne tend pas vers 0

iv) On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente(ACV) lorsque la série de termé général $|u_n|$ converge, càd lorsque $\sum |u_n|$ converge

On montrera plus tard que:

- *une série GDV est forcément une série DV (réciproque fausse)*
- *une série ACV est forcément une série CV (réciproque fausse)*

remarque 1 (*Très important*)

Il faut bien comprendre que lorsque l'on s'intéresse à la série de terme général u_n on ne s'intéresse pas à la suite (u_n) mais à une autre suite qui est définie à partir de u_n, à savoir la suite (S_n)

- *par exemple, l'étude de la série de terme général $u_n = 1$ correspond à l'étude de la suite (S_n) définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = n+1$*
- *de même, l'étude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ correspond à l'étude de la suite (S_n) définie par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$*

Dans la pluplart des cas, on ne sait pas calculer l'expression de explicite de S_n. Ce chapitre développe alors des théorèmes qui permettent, en considérant u_n (càd le terme général), d'avoir des conclusions sur S_n (càd la somme partielle, et donc la série)

exemple 1:
Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels ou de complexes.

1. La somme partielle d'indice n de la série de tg u_n est Σ
2. La somme partielle d'indice $2n$ de la série de tg u_n est Σ
3. La somme partielle d'indice n de la série de tg u_{2n} est Σ
4. La somme partielle d'indice $2n$ de la série de tg u_{2n} est Σ

exemple 2:
Indiquer la nature précise(CV, DV, ACV, GDV) des séries suivantes:

$$\sum \frac{1}{n^2} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad \sum \frac{1}{n} \qquad \sum \frac{5}{\sqrt{n}} \qquad \sum \sqrt{n} \qquad \sum \cos n \qquad \sum \frac{(-2)^n}{n!} \qquad \sum n! \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

remarque 2

- *lorsqu'une série nous est donnée, la première question posée est celle de sa convergence. Si elle l'est, on peut chercher la valeur exacte de sa somme (ou se contenter d'une valeur approchée.)*
- *dans les cas les plus simples, les sommes partielles sont calculables: l'étude de la série se fait alors par l'étude de la suite de ses sommes partielles (situation télescopique le plus souvent ou géométrique ou par récurrence).*
- *déterminer <u>la nature d'une série</u>, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente*
- *une série est divergente soit parce que la suite des sommes partielles (S_n) admet une limite infinie, soit parce que la suite (S_n) ne possède pas de limite.<u>(chercher un exemple de série pour chacun des deux cas ci-dessus)</u>*

1.2 procédé télescopique

Le cas classique où on peut calculer la somme S_n est celui du **procédé télescopique** :
le terme général u_n s'écrit sous la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$ et on a donc $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_{n_0}$

théorème 1: lien entre suite et série - à savoir redémontrer

la suite (v_n) converge **si et seulement si** la série de terme général $u_n = v_{n+1} - v_n$ converge
c'est à dire:

$$(v_n) \text{ converge} \iff \sum v_{n+1} - v_n \text{ converge}$$

$$\text{Dans le cas de convergence : } \sum_{k=n_0}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = (\lim_{n\to+\infty} v_n) - v_{n_0}$$

rem: il suffit de se rappeler que pour $n \geqslant n_0$ on a $\sum\limits_{k=n_0}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_{n_0}$

rem: bien sûr, $\sum v_{n+1} - v_n$ et $\sum v_n - v_{n-1}$ désigne la même série

exemple 3: l'exemple hyper-classique

On pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall n \geqslant 1, \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$
2. En déduire une expression très simple de S_n
3. La suite (S_n) est-elle convergente?

1. Le calcul donne $a = 1$ et $b = -1$
2. Soit $n \geqslant 1$.
   On a

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

   (On a réalisé un glissement d'indice $k \leftarrow k+1$ dans la seconde somme)
3. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$, on peut affirmer que la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge
   et que sa somme vaut $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1}$

1.3 exemples de référence

théorème 2: Séries de Riemann (énoncé général)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{\lambda}{n^\alpha} \text{ (où } \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ fixé) converge } \underline{\text{si et seulement si}}\ \alpha > 1.}$$

ce que l'on peut encore écrire:

$$\boxed{\sum \frac{\lambda}{n^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha > 1}$$

théorème 3: séries géométriques

Soit $a \in \mathbb{C}$.

La série $\sum a^n$ converge [converge absolument] ssi $|a| < 1$, et dans ce cas $\boxed{\sum_0^\infty a^n = \dfrac{1}{1-a}}$

D'une manière plus générale, une série géométrique est une série dont le terme général est du type $C.a^n$, où a et C sont deux constantes indépendantes de n

théorème 4: exponentielle complexe

Pour tout complexe z, la série de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et $\boxed{\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}}$

Les séries géométriques sont particulièrement importantes et on les retrouve vraiment très souvent, parfois sous des formes cachées avec des cos ou des sin. L'idée est alors de "passer en complexe" pour faire apparaître une somme géométrique.

méthode 1: Quelques formules à savoir retrouver

N désigne un entier naturel fixé.

- $\sum_{n=N}^{\infty} a^n = \dfrac{a^N}{1-a}$ si $|a| < 1$ bien sûr
- $\sum_{n=0}^{N} a^n = \begin{cases} N+1 & \text{si } a = 1 \\ \dfrac{1-a^{N+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} a^{kn+p} = \dfrac{a^p}{1-a^k}$ si $|a| < 1$, k non nul et p quelconque.

par exemple, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} . \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} . \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right)^{n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} . \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n} = 3^5 . \frac{1}{1-\frac{1}{9}}$$

remarque 3 (*à propos des séries de Riemann*)

- *Pour $\alpha \leqslant 0$ la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est grossièrement divergente.*
- *Dans les autres cas, la démonstration se fait par comparaison à une intégrale (à savoir refaire)*
- *Les séries $\sum \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ sont deux séries de Riemann divergentes.*

- *Les mathématiciens savent calculer explicitement la somme des séries de Riemann du type* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *lorsque* α *est un entier naturel pair supérieur ou égal à deux. Pour information, on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$$

- *En revanche si* α *est un entier impair, on ne sait pas grand chose... Que vaut* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *? C'est, à ce jour, un mystère. Apéry, mathématicien français effectivement décédé, montra en 1979 que c'était un nombre irrationnel. Et en 2001, Tanguy Rivoal reçu le prix Langevin(d'un montant de 10 000F) pour avoir montré qu'il existe une infinité d'entiers* α *impairs pour lesquels la série de Riemann est irrationnelle.*

1.4 des résultats à avoir en tête

théorème 5: condition nécessaire de convergence
Pour qu'une série converge, il faut que son terme général tende vers 0 .
Attention ! La réciproque est fausse : le terme général d'une série peut tendre vers zéro sans que pour autant la série ne converge(cf. exemples plus bas).

démonstration:
Soit $\sum u_n$ *une série convergente.*
Pour tout $n \geqslant n_0$, *on a*

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=n_0}^{n+1} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n+1}$$

Comme $\sum u_n$ *converge on sait que* $\lim S_n$ *existe et est finie (notons la* S*)*
On a alors

$$\lim S_{n+1} - S_n = \lim S_{n+1} - \lim S_n = S - S = 0$$

Ainsi $\lim u_{n+1} = 0$ *cqfd!*

exemple 4: la série harmonique est DV mais pas GDV
On s'intéresse à la série $\sum \frac{1}{n}$. On note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. prouver que pour tout $n \geqslant 1, S_{2n} - S_n \geqslant 1/2$
2. en raisonnant par l'absurde, montrer que $\sum \frac{1}{n}$ diverge

1. Soit $n \geqslant 1$.
   On a
   $$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$
   On a
   $$\forall k \in [\![n+1, 2n]\!], \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$$
   et donc
   $$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
2. **Supposons que la série** $\sum \frac{1}{n}$ **converge.**
   Notons S la limite finie de la suite (S_n), càd $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.
   Comme (S_{2n}) est une suite extraite de la suite (S_n), on sait que $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ également.
   Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} - S_n = S - S = 0$.
   Or comme pour tout n on a $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$, on doit avoir $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
   contradiction
   Conclusion: la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente

remarque 4 (*importante*)

la nature d'une série ne change pas si l'on change un nombre fini de termes.
(C'est d'ailleurs pour cela que l'on note une série $\sum u_n$ sans se référer au premier indice $n_0\dots$)
La nature d'une série dépend donc uniquement du "comportement" du terme général au voisinage de $+\infty$.
En revanche, la somme d'une série convergente a priori change(... et c'est pour cela que la notation de la valeur de la série utilise d'indice n_0) .

exemple 5:
On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de $\forall n \geqslant 1, u_n = \frac{1}{n(n+1)}$
et la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_1 = 1, v_2 = 0$ et $\forall n \geqslant 3, v_n = \frac{1}{n(n+1)}$.
On note S_n (resp. T_n) la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$ (resp. $\sum v_n$).
On a ainsi:

- $S_1 = u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $T_1 = v_1 = 1$
- $S_2 = u_1 + u_2 = \dfrac{2}{3}$ et $T_2 = v_1 + v_2 = 1$
- $S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \dfrac{3}{4}$ et $T_3 = v_1 + v_2 + v_3 = \dfrac{13}{12}$

Comme pour tout $k \geqslant 3$ on a $u_k = v_k$, on peut alors affirmer que:

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 3 \text{ fixé on a } \sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{k=3}^{n} v_k.}$$

On en déduit donc que pour tout $n \geqslant 3$ fixé, on a

$$T_n = v_1 + v_2 + \sum_{k=3}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \sum_{k=3}^{n} u_k = v_1 + v_2 - u_1 - u_2 + \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 + 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + S_n = S_n + \frac{1}{3}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (T_n) \text{ converge ssi la suite } (S_n) \text{ converge}}$, et l'on a dans ce cas $\lim T_n = \dfrac{1}{3} + \lim S_n$
Comme on a prouvé que la série $\sum u_n$ converge et que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = 1$,
on peut affirmer que $\sum v_n$ converge et l'on a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{4}{3}$

Lorsque, comme dans l'exemple précédent, on modifie un nombre fini de termes d'une série, les suites des sommes partielles sont égales à une constante additive près (à partir d'un certain rang) .
Soient $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$ deux séries de sommes partielles respectives S_n et T_n.
On suppose qu'il existe $N \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant N, u_n = v_n$.
On a alors pour $n \geqslant N$:

$$S_n - T_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} v_k = \sum_{k=n_0}^{n} (u_k - v_k) = \sum_{k=n_0}^{N-1} (u_k - v_k) + \sum_{k=N}^{n} (u_k - v_k) = \underbrace{\sum_{k=n_0}^{N-1} (u_k - v_k)}_{\text{terme constant}}$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, les suites (S_n) et (T_n) sont égales à une constante près, donc sont simultanément convergentes ou simultanément divergentes. $\boxed{\text{Ccl: les séries } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}}$

remarque 5 (*à avoir en tête également*)

La nature d'une série n'est pas modifiée si on multiplie son terme général par un scalaire non nul. *(cf. le paragraphe "Quelques considérations importantes")*

1.5 approximation de la somme d'un série convergente

définition 3: reste

Lorsque $\sum u_n$ est une série convergente, de somme S, on appelle reste d'ordre d'ordre n la différence

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$$

rem: il est immédiat que

i) $\lim R_n = 0$

ii) *la suite (R_n) est décroissante lorsque la série est à terme général positif.*
(en effet $R_{n+1} - R_n = S_n - S_{n+1} = -u_{n+1}$)

remarque 6 (*important*)

On considère une série convergente. On notera S_n sa somme partielle d'indice n et S la somme de la série. On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{C}$(limite finie) La notion de reste est bien utile pour déterminer une valeur approchée de la somme d'une série avec une précision donnée.
En effet, on a $S = S_n + R_n$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, ce qui permet de prendre S_n (n étant un entier fixé, on sait calculer S_n car cette somme comporte un nombre fini de termes) comme valeur approchée de S à une précision de R_n.(voir les exemples du paragraphe correspondants)

exemple 6: à traiter après l'exemple 12

Donner une valeur approchée à 10^{-6} près de $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k + 3^k + \cdots + 2015^k}$

1. A l'aide de l'encadrement $0 < u_k \leqslant \dfrac{1}{2^k}$
   - Ayant prouvé auparavant la convergence de chaque série, on peut écrire, pour tout $n \geqslant 1$ que
     $$0 < R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})^n$$
   - Ainsi, pour être sûr que S_n soit une valeur approchée (par défaut) de S à 10^{-6} près, il suffit de choisir n tel que $\dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-6}$.
   - La suite (2^n) est une suite coissante et l'on a $2^{19} = 524288 < 10^6 < 1048576 = 2^{20}$.
     On peut donc affirmer, et on ne peut pas faire mieux, que S_{20} est une valeur approchée de S à 10^{-6} près.
2. A l'aide de l'encadrement $0 < u_k \leqslant \dfrac{1}{2015^k}$
   - Ayant prouvé auparavant la convergence de chaque série, on peut écrire, pour tout $n \geqslant 1$ que
     $$0 < R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2015}\right)^k = \frac{(\frac{1}{2015})^{n+1}}{1-\frac{1}{2015}} = \frac{1}{2014}.\frac{1}{2015^n}$$
   - Cette fois, on constate avec plaisir que, le plus petit n qui vérifie $\dfrac{1}{2014}.\dfrac{1}{2015^n} \leqslant 10^{-6}$ est $\dots n = 1$!
   - Ainsi, $S_1 = u_1$ est une valeur approchée de S à 10^{-6} près.
   - On a $u_1 = \dfrac{1}{2+3+\cdots+2015} = \dfrac{2}{2017 \times 2014} \cong 0{,}49\,10^{-6}$

exemple 7: autre recherche de valeur approchée

- Nous montrerons en exercice que la série $\sum \frac{1}{n^2 2^n}$ était convergente.
- Déterminons maintenant une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$ à 10^{-2} près.
- **Très souvent, pour majorer une somme, on va majorer chaque terme de la somme.**
- Ici, soit n un entier supérieur ou égal à un fixé.
  On a pour tout $k \geqslant n+1$ l'encadrement $0 < \frac{1}{k^2 2^k} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2 .2^k}$
  On a donc
  $$0 < S - S_n = R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 .2^k} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n (n+1)^2}$$
- Le plus petit entier n tel que $\frac{1}{2^n (n+1)^2} \leqslant 10^{-2}$ est $n = 3$. Donc S_3 fournit une valeur approchée de la somme de la série à 10^{-2} près. On a $S_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^2 2^k} = \frac{83}{144} = 0{,}576$ à 10^{-3} près.
- Conclusion : $\boxed{S \text{ est égale à } 0{,}57 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$

exemple 8: recherche de valeur approchée avec comparaison à une intégrale.

On souhaite donner une valeur approchée de $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ à 10^{-2} près.

On utilise les notations habituelles: $u_n = \frac{1}{n^3}$. $(S, S_n, R_n \ldots)$

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, on a $u_k \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$ (on note v_k cette quantité)
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $N > n$, on a $\sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \int_{n}^{N} \frac{dt}{t^3}$
3. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 < R_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$, et proposer une valeur approchée de S à 10^{-2} près.
4. Remarque:
   - Il est facile de prouver que pour tout $k \geqslant 2$ on a $u_k \leqslant \frac{1}{k^3 - k}$.
   - On en déduit que pour tout (n,N) tel que $N > n \geqslant 2$ on a $0 < \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} v_k$
   - Puis en faisant tendre $N \to \infty$, on prouve que $0 < R_n \leqslant \frac{1}{2n(n+1)}$
   - Avec cette majoration, on peut affirmer que S_7 est une valeur approchée de S à 10^{-2} près!

Applications numériques:

- $S_7 = 1.1932$ *à* 10^{-4} *près et* $S_8 = 1.1951$ *à* 10^{-4} *près*

2 Séries à termes positifs

Rappels sur les suites croissantes : **théorème des suites monotones**

- une suite croissante possède toujours une limite
- une suite croissante possède une limite finie ssi elle est majorée.
- une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

On garde les mêmes notations que précedemment ($u_n, S_n\, S\dots$):

théorème 6: important à garder en tête quand le tg est positif

Soit une série de terme général positif.

Alors la suite des sommes partielles (S_n) est croissante. (car on a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$)

Et par conséquent, d'après le théorème des suites monotones, il y a équivalence entre :

i) *la suite (S_n) est majorée*

ii) *la suite (S_n) est une suite convergente.*

iii) *la série $\sum u_n$ converge.*

exemple 9:

- La série de tg $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0$ a la suite de ses sommes partielles croissante car $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant 0$
- La série de tg $u_n = \frac{-1}{\sqrt{n}} \leqslant 0$ a la suite de ses sommes partielles décroissante car $S_{n+1} - S_n = \frac{-1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 0$
- La série de tg $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a la suite de ses sommes partielles qui n'est pas monotone car $S_{n+1} - S_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ est négatif pour n pair et positif pour n impair

théorème 7:

Soit $\sum u_n$ une série de terme général positif pour n assez grand. Alors:

$$\text{la série } \sum u_n \text{ diverge } \textbf{ssi} \lim S_n = +\infty \text{ (càd les sommes partielles tendent vers } +\infty)$$

remarque 7

Lorsqu'il n'y a pas d'hypothèses sur le terme général et qu'on sait qu'une série est divergente, on peut juste dire que la suite de ses sommes partielles ne possède pas de limite, ou bien qu'elle possède une limite infinie. Mais on ne peut en dire plus: on ne sait pas dans lequel des deux cas on se trouve.
Cependant, lorsque le terme général est positif pour n assez grand, on peut dire que si une série est divergente alors c'est forcément que ses sommes partielles tendent vers $+\infty$

exemple 10:

- La série $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série dont le terme général est positif (c'est $\dfrac{1}{n} > 0$)
- On sait que cette série est une série divergente.
  On peut donc $\boxed{\text{affirmer}}$ que la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$
- On vient de montrer que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = +\infty}$

2.1 comparaison entre deux séries

théorème 8: théorème de comparaison des séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que pour n suffisamment grand, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

i) **Si** $\sum v_n$ converge **alors** $\sum u_n$ converge.

ii) **Si** $\sum u_n$ diverge **alors** $\sum v_n$ diverge

ce qui s'écrit encore:

i) $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge

ii) $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge

remarque 8

les locutions pour n suffisamment grand, à partir d'un certain rang et pour n au voisinage de l'infini sont synonymes: elles correspondent à la séquence logique $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N$. Ainsi, l'hypothèse que doivent vérifier les deux séries du théorème précédent est $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

démonstration du théorème 8.

- Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que pour n suffisamment grand, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
- Quitte à changer un nombre fini de termes (ce qui ne change pas la nature d'une série), on peut supposer que $\forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$
- Notons S_n [resp. T_n] la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$ [resp. $\sum v_n$]
- Comme les séries sont de terme général positif, on peut affirmer que
  $\boxed{\text{les suites des sommes partielles } (S_n) \text{ et } (T_n) \text{ sont deux suites croissantes}}$
- Soit $n \geqslant n_0$
  Comme pour tout $k \in [\![n_0, n]\!]$ on a $0 \leqslant u_k \leqslant v_k$, on a par sommation $\sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} v_k$
  On vient de montrer que $\boxed{\forall n \geqslant n_0, S_n \leqslant T_n}$
- Montrons que $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge
  Soit $\sum v_n$ une série convergente.
  Par définition ceci signifie que la suite (T_n) est une suite convergente.
  Or "toute suite convergente est bornée (et donc en particulier majorée)",
  ce qui assure $\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, T_n \leqslant M}$
  Par transitivité de la relation $\leqslant$ on en déduit que $\boxed{\forall n \geqslant n_0, S_n \leqslant M}$
  On vient d'établir que la suite (S_n) est majorée.
  La suite (S_n) est croissante majorée donc elle converge.
- Le point ii) du théorème n'est rien d'autre que la contraposée du point i)

exemple 11: Montrons que la série de terme général $\dfrac{1}{\ln n}$ est divergente.

Un inégalité classique est $\forall x \geqslant 0, x \geqslant \ln(1+x) \geqslant \ln x$.

On peut donc en déduire que $\forall n \geqslant 2,, 0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{\ln n}$.

Or la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, donc $\boxed{\sum \dfrac{1}{\ln n} \text{ diverge}}$

méthode 2: majoration ou minoration du terme général(quand il est positif)

- **Pour prouver la convergence d'une série, on majore son terme général**

  Nous allons montrer que $\sum \frac{1}{n^2.\ln n}$ est une série convergente.

  On peut remarquer que pour $n \geqslant 3$ on a $0 \leqslant \frac{1}{n^2.\ln n} \leqslant \frac{1}{n^2}$

  Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de référence convergente, donc par application du théorème ci-dessus on peut affirmer que $\sum \frac{1}{n^2.\ln n}$ est une série convergente

- **Pour prouver la divergence d'une série, on minore son terme général**

  Nous allons montrer que $\sum \frac{\ln n}{n}$ est une série divergente.

  On peut remarquer que pour $n \geqslant 3$ on a $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{\ln n}{n}$

  Or $\sum \frac{1}{n}$ est une série de référence divergente, donc par application du théorème ci-dessus on peut affirmer que $\sum \frac{\ln n}{n}$ est une série divergente

exemple 12:

Déterminer la nature de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n+\cdots+2015^n}$ (on pose $u_n = \frac{1}{2^n+3^n+\cdots+2015^n}$)

On commence par remarquer que le terme général tend très rapidement vers zéro: on suspecte donc une série convergente.

1. Première majoration.

   On remarque que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   Or la série $\sum(1/2)^n$ est une série géométrique convergente, donc $\sum u_n$ converge.
2. Seconde majoration.

   On remarque que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2015^n} = \left(\frac{1}{2015}\right)^n$.

   Or la série $\sum(1/2015)^n$ est une série géométrique convergente, donc $\sum u_n$ converge.
3. Pour ce qui concerne l'étude de la convergence, il n'y a pas de majoration à préférer. En revanche, en ce qui concerne la recherche d'une d'une valeur approchée de la somme, une majoration sera beaucoup plus efficace que l'autre. (cf exemple 6)

Le théorème ci-dessous permet en effectuant un équivalent du terme général et en utilisant des séries de référence de déterminer la nature d'une série.(sans passer par les sommes partielles donc!)

théorème 9: Règles des équivalents(démo en exo)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ et v_n de signe stable pour n assez grand.

Alors , les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

remarque 9

On rappelle que:

- *v_n est dit de signe stable pour n assez grand lorsque, à partir d'un certain rang, v_n est toujours positif ou bien toujours négatif.*
- *de même nature signifie que les séries sont simultanément convergentes ou simultanément divergentes.*

remarque 10

- *le théorème 9 sera sans doute celui que vous utiliserez le plus!*
- *des théorèmes précédents, on retiendra l'idée que, pour les séries à termes positifs, déterminer si une série est convergente c'est déterminer si son terme général tend suffisamment rapidement vers zéro.*

méthode 3: prendre un équivalent du terme général

Pour déterminer la nature d'une série, on peut prendre un équivalent de son terme général et, si celui-ci est de signe stable au voisinage de l'infini, comparer avec des séries de référence.

- On s'intéresse à la série $\sum \frac{4n-100}{n(n+1)(n+\pi)}$ (on pose $u_n = \frac{4n-100}{n(n+1)(n+\pi)}$)
- On a $u_n \sim \frac{4n}{n^3} = \frac{4}{n^2}$
- Or $v_n = \frac{4}{n^2}$ est de signe stable pour n assez grand et $\sum v_n$ est une série de Riemann convergente.
  On peut donc affirmer grâce au théorème ci-dessus que $\sum u_n$ est une série convergente

exemple 13: un exemple intéressant dans l'absolu

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \arcsin \frac{(-1)^n}{n^2}$

- On sait que $\arcsin X \underset{0}{\sim} X$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$, on peut en déduire que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^2}$.
  Attention ici!
  Comme le terme général n'est pas de signe stable, on ne peut utiliser la règle des équivalents à la série de terme général u_n !
- **En revanche, on peut toujours utiliser la règle des équivalents pour prouver une éventuelle absolue convergence.**
- On a $|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$
  or $v_n = \frac{1}{n^2}$ est de signe stable pour n assez grand et $\sum v_n$ est une série de Riemann convergente.
  On peut donc affirmer d'après la règle des équivalents que $\sum |u_n|$ est une série convergente.
  On a montré que $\sum u_n$ est un série ACV donc convergente

2.2 comparaison avec une série géométrique

théorème 10: règle de D'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs pour n assez grand.
On suppose que $\lim\limits_{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ existe. **Alors** :

i. si $l > 1$ alors $\sum u_n$ GDV
ii. si $l < 1$ alors $\sum u_n$ CV (en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$)
iii. si $l = 1$ alors pas de conclusion quant à la nature de la série

remarque 11

- *On pensera à utiliser cette régle lorsque le quotient se simplifie aisément (par exemple en présence de factorielles,...)*
- *Attention ! Il n'y a pas de réciproque à la règle de D'Alembert...*

exemple 14: les exemples typiques

Déterminons la nature des séries suivantes $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ et $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ où x est un réel strictement positif donné. (autant que possible, on essaiera de ne pas utiliser la formule de Stirling, qu'il est intéressant de connaitre, mais qui est hors-programme : $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n\sqrt{2\pi n}e^{-n}$)

Démonstration de la règle de D'Alembert:

Comme la nature d'une série ne change pas en modifiant un nombre fini de termes,
on peut supposer que $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant n_0$

i) $\boxed{\text{cas où } \lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1}$

On peut alors affirmer que pour n assez grand on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (pour une démo détaillée, revenir avec les ε)
Comme $u_n > 0$, ceci signifie que pour n assez grand $u_{n+1} > u_n$
La suite (u_n) est à valeurs strictement positives et est strictement croissante à partir d'un certain rang, on ne peut donc avoir $\lim u_n = 0$. La série $\sum u_n$ est bien GDV

ii) $\boxed{\text{cas où } \lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1}$

Par définition, ceci signifie que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leqslant \varepsilon$
soit de manière équivalente $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, l - \varepsilon \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant l + \varepsilon$
Considérons un $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $l + \varepsilon < 1$ (par exemple $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2}$)

Comme $u_n > 0$ par hypothèse, on a donc $\forall n \geqslant N, u_{n+1} \leqslant (l+\varepsilon).u_n$
Fixons un $n > N$, on peut écrire de manière informelle(*)

$$u_n \leqslant (l+\varepsilon)u_{n-1} \leqslant (l+\varepsilon)^2 u_{n-2} \leqslant (l+\varepsilon)^3 u_{n-3} \leqslant \ldots \leqslant (l+\varepsilon)^{n-N}.u_N = (l+\varepsilon)^n(1+\varepsilon)^{-N}u_N$$

Le terme u_n est donc strictement positif et majoré pour n assez grand par le terme général d'une série géométrique de raison $(l+\varepsilon)$.
Or pour le choix judicieux de ε que nous avons fait, nous avons la série $\sum (l+\varepsilon)^n(1+\varepsilon)^{-N}u_N$ qui converge, et donc par théorème de comparaison on peut affirmer que $\sum u_n$ converge.
(*): pour davantage de rigueur, on peut prouver ***par récurrence*** *que* $\forall n \geqslant N, u_n \leqslant (l+\varepsilon)^{n-N}.u_N$

iii) $\boxed{\text{cas où } \lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l = 1}$

Il suffit de donner deux exemples:

- La série $\sum \dfrac{1}{n}$ DV et l'on a $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \dfrac{n+1}{n} = 1$
- La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ CV et l'on a $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 = 1$

2.3 comparaison avec une intégrale

théorème 11: comparaison série intégrale - à savoir retrouver impérativement !

Soit f une fonction définie, continue sur $[n_0, +\infty[$, on note $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} f(k)$ $(n_0 \in \mathbb{N}$ fixé)

1. Si f est décroissante alors $\int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leqslant S_n \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)dt$
2. Si f est croissante, alors $\int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \geqslant S_n \geqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)dt$

méthode 4: encadrement d'une somme partielle avec une intégrale

On considère une fonction f monotone sur un intervalle I.
Pour tout k entier tel que $[k,k+1] \subset I$, on utilise la monotonie de f sur $[k,k+1]$ pour écrire une inégalité du type $\boxed{\forall t \in [k,k+1], f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k+1)}$ (cas croissant)
Puis on intègre par rapport à t sur le segment $[k,k+1]$ ce qui donne, **par la propriété de croissance de l'intégrale**, une inégalité du type

$\boxed{f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k+1)}$ (cas croissant) ou $\boxed{f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)}$ (cas décroissant)

Et ensuite on "somme" ces inégalités et on n'oublie pas d'utiliser **la relation de Chasles** !

exemple 15: utilisation pour obtenir un équivalent d'une somme partielle

Déterminer un équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^{2022}$ et de $T_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} k^{-2022}$ lorsque $n \to +\infty$

remarque 12

Quand on aura vu les intégrales génŕalisées on pourra utiliser le théorème plus abouti ci-dessous pour déterminer la nature d'une série

définition 4:

Soit f définie et continue que un intervalle $[a,+\infty[$.
On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie.
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente

théorème 12:

Soit f une fonction définie,continue, décroissante (et positive) sur $[n_0,\infty[$. Alors:

1. *la série de terme général $u_n = f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge.*
2. *dans le cas de convergence : $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)dt$*

exemple 16:

Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$ est divergente.
Solution:

- *Notons* $\boxed{\begin{array}{rcl} f:]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\ln t}{t} \end{array}}$
  La fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas. On a $\forall t > 0, f'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2}$
- *Sur l'intervalle $[3,+\infty[$, la fonction f est définie, continue et décroissante.*
  On peut donc affirmer grâce au théorème précédent que:

$$\text{La série } \sum f(n) \text{ converge} \iff \text{l'intégrale } \int_3^{\infty} f(t)dt \text{ converge}$$

Or $\displaystyle\int_3^x f(t)dt = \int_3^x \frac{1}{t}.\ln(t)dt = \left[\frac{\ln^2 t}{2}\right]_3^x \to +\infty$ *lorsque* $x \to +\infty$

On en déduit que $\sum \dfrac{\ln n}{n}$ *est une série divergente*

exemple 17:

Déterminer la nature de la série de tg $u_n = \dfrac{1}{n\ln^\alpha n}$ suivant les valeurs du paramètre réel α

3 Quelques considérations importantes

théorème 13:

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries

i.) si $\sum u_n$ CV et $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n + v_n$ CV, et l'on a $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n + v_n = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n + \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} v_n$

ii.) si $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n + v_n$ DV

iii.) si $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ DV alors pas de conclusion directe quant à la convergence de $\sum u_n + v_n$

iv.) si $\sum u_n$ CV alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, la série $\sum \lambda u_n$ CV et l'on a $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$

v.) si $\sum u_n$ DV alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ non nul, la série $\sum \lambda u_n$ DV

démonstration:

Notons $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k$ les sommes partielles d'indice n des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$

- la série de tg $u_n + v_n$ a pour somme partielle d'indice n, $\sum\limits_{k=n_0}^{n} (u_k + v_k) = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k + \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k = S_n + T_n$
- la série de tg $\lambda.u_n$ a pour somme partielle d'indice n, $\sum\limits_{k=n_0}^{n} \lambda.u_k = \lambda \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k = \lambda.S_n$

Il suffit d'envisager les différents cas et de s'appuyer sur le rappel ci-dessous.

$\lim S_n$	$\lim T_n$	$\lim(S_n + T_)$
$l \in \mathbb{R}$	$l' \in \mathbb{R}$	$l + l' \in \mathbb{R}$
$+\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$l' \in \mathbb{R}$	$-\infty$
$\nexists$	$l' \in \mathbb{R}$	$\nexists$
$\nexists$	$+\infty$	Forme Indet.

$\lim S_n$	$\lim T_n$	$\lim(S_n + T_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme Indet.
$\nexists$	$\nexists$	Forme Indet.
$\nexists$	$-\infty$	Forme Indet.

$\lim S_n$	λ	$\lim(\lambda.S_n)$
$l \in \mathbb{R}$	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda.l \in \mathbb{R}$
$+\infty$	$\lambda > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$\lambda < 0$	$-\infty$
$+\infty$	$\lambda = 0$	0
$\nexists$	$\lambda = 0$	0
$\nexists$	$\lambda \neq 0$	$\nexists$

exemple 18:

- on peut affirmer que la série $\sum \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n}$ est divergente

  car c'est la somme d'une série convergente $\left(\sum \dfrac{2}{n^2}\right)$ et d'une série divergente $\left(\sum \dfrac{3}{n}\right)$

remarque 13

On prendra bien garde au troisième point du théorème lorsue l'on décomposera une série comme somme de deux séries. En effet , on peut très bien se retrouver avec la situation suivante : $\sum u_n + v_n$ *converge mais* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries divergentes .*
exemple: il ne faut pas écrire $\sum \frac{1}{n^2} = \sum \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \sum \frac{1}{n}$

définition 5: terme général de signe stable

On dit que le terme général u_n est de signe stable lorsque la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite réelle de nombres tous positifs, ou tous négatifs.

remarque 14

- *le terme général est donc de signe stable si et seulement si* $\forall n \geqslant n_0, u_n.u_{n+1} > 0$
- *on dit que le terme général u_n est de signe stable au voisinage de $+\infty$ lorsque*

$$\exists N \geqslant n_0, \forall n \geqslant N, u_n.u_{n+1} > 0$$

exemple 19:

1. la série $\sum \frac{1}{(2-3n)(401-2n)}$ n'a pas son terme général de signe stable, car pour n compris entre 2 et 200 il est négatif et au dessus de 201 il est positif. Cependant, on dira dans ce cas que le terme général est de signe stable au voisinage de l'infini. Et alors la plupart des théorèmes du paragraphe précédent sont utilisables.
2. la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$ n'a pas son terme général de signe stable, même en se restreignant au voisinage de l'infini : les termes où n est pair sont positifs et ceux où n est impair sont négatifs.
3. la série $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ elle non plus n'a pas son terme général de signe stable au voisinage de l'infini : cette fois, c'est un peu plus délicat à prouver…

remarque 15

si le signe du terme général n'est pas stable au voisinage de l'infini, le theo 9 ne peut s'appliquer ! *Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'exemple 27.*

proposition 1

Soit $\sum u_n$ *une série complexe. Il y a équivalence entre :*

i. la série complexe $\sum u_n$ *converge*

ii. les deux séries réelles $\sum Re(u_n)$ *et* $\sum Im(u_n)$ *convergent*

Cela résulte du fait qu'une suite complexe converge ssi la suite de ses parties réelles et la suite de ses parties imaginaires convergent.

méthode 5: étude d'une série de terme général complexe

On peut:

- soit passer par les sommes partielles et les expliciter (retour à la définition donc)
- soit faire l'étude des séries des parties réelles et des parties imaginaires (comme le suggère la proposition précédente …mais qui dans la pratique est peu usité…)
- soit avoir recours à la notion de convergence absolue)

4 Convergence absolue

Cett notion est à utiliser à chaque fois que le terme général de la série est complexe, ou réel mais de signe non stable au voisinage de l'infini.

théorème 14: l'absolue convergence entraîne la convergence

Toute série absolument convergente est convergente, et l'on a la majoration $\boxed{|\sum_{n_0}^{\infty} u_n| \leqslant \sum_{n_0}^{\infty} |u_n|}$
(la valeur absolue de la somme de la série est majorée par la somme de la série des valeurs absolues)

définition 6: Hors-programme

une série qui converge sans converger absolument est dite semi-convergente (SCV)

exemple 20:

- La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est une série absolument convergente, donc convergente.
- La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ n'est pas une série absolument convergente mais on prouvera qu'elle converge tout de même: c'est un exemple typique de série semi-convergente.

remarque 16

Comme il y a équivalence entre $\lim u_n = 0$ *et* $\lim |u_n| = 0$, *on peut en déduire qu'il y a équivalence entre* $\sum |u_n|$ *GDV et* $\sum u_n$ *GDV*

théorème 15: comparaison avec o et O

Soit $\sum v_n$ une série absolument convergente, et $\sum u_n$ une série de terme général complexe.

Si $u_n = O(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ **alors** la série $\sum u_n$ est absolument convergente

rappel: $u_n = O(v_n)$ *ssi la suite* $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ *est bornée ssi* $\exists\, k > 0, \forall n \geqslant 0, |u_n| \leqslant k.|v_n|$

méthode 6: estimer le module du terme général pour prouver l'ACV

Reconnaître que le terme général s'écrit comme le produit d'une suite bornée (ou encore mieux d'une suite qui tend vers zéro) et du terme général d'une série absolument convergente

Exemple:

Montrer que la série $\sum \dfrac{\ln n}{n^2}$ *est une série convergente.*

On remarque que $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2} = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} . \dfrac{1}{n^{1.5}} = o\left(\dfrac{1}{n^{1.5}}\right)$ *car d'après le théorème des puissances comparées on sait que* $\lim \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$.

Et comme $\sum \dfrac{1}{n^{1.5}}$ *est une série ACV, on peut affirmer par théorème de comparaison que* $\sum \dfrac{\ln n}{n^2}$ *est une série convergente*

méthode 7: Pour justifier que $u_n = O(1/n^\alpha)$ ou $u_n = o(1/n^\alpha)$ avec $\alpha > 1$

i) ou on étudie le rapport $\dfrac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = n^\alpha . u_n$ en considérant sa limite

ii) ou on remarque que u_n est de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha} . \beta_n$ avec (β_n) suite bornée (typiquement $(-1)^n$) ou qui tend vers zéro

exemple 21: étude la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos(e^n)}{n^2}$

1. première idée:
   On a $\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$,
   or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum |u_n|$ est une série convergente.
   On vient de montrer que $\sum u_n$ était une série ACV donc convergente.
   Et de plus, on a la majoration $\left| \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(e^n)}{n^2} \right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.
2. deuxième idée:
   On écrit $u_n = \dfrac{\cos(e^n)}{n^2} = \dfrac{\cos(e^n)}{\sqrt{n}}.\dfrac{1}{n^{1.5}}$ et comme $\lim \dfrac{\cos(e^n)}{\sqrt{n}} = 0$ on a prouvé que $u_n = o(\dfrac{1}{n^{1.5}})$
   Comme $\sum \dfrac{1}{n^{1.5}}$ est une série ACV, on peut affirmer que $\sum u_n$ est ACV
3. troisième idée:
   On dit que $(\cos(e^n))$ est une suite bornée et cela permet d'écrire $u_n = O(\dfrac{1}{n^2})$
   Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série ACV, on peut affirmer que $\sum u_n$

remarque 17 (*en lien avec les probabilités*)

1. *lorsque la série* $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ *est absolument convergente,*
   on dit encore que la famille $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ *est sommable, et l'on peut noter* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |u_n| < +\infty$
2. *Il est facile de montrer que*
   $\boxed{\text{La somme de deux séries ACV est encore une série ACV}}$
   De cette propriété, on en déduira que si X *et* Y *sont deux variables aléatoires qui possèdent une espérance alors* $X+Y$ *est une v.a. qui possède une espérance.*
3. *Dans la définition de l'espérance on impose l'absolue convergence et pas seulement la convergence. Car on a le résultat hors-programme suivant (développé plus loin):*
   $\boxed{\text{toute série ACV est commutativement convergente}}$
   Ceci nous permet d'assurer que l'espèrance d'une v.a. ne dépendra pas de la manière dont on aura numéroté les valeurs prises par X.
   Si on a $X(\Omega) = \{x_k | k \in \mathbb{N}\} = \{y_l | l \in \mathbb{N}\}$ *alors* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k P(X = x_k) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} y_l P(X = y_l) \quad (= E(X))$

5 Deux théorèmes Hors-Programme

théorème 16: Règle de Cauchy (HP)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $\lim\limits_{\infty} (u_n)^{1/n} = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ existe.

i. si $L > 1$ alors la série diverge
ii. si $L < 1$ alors la série converge

Vous pouvez essayer de démontrer cette règle précédente, ce n'est pas très compliqué. . .

théorème 17: Règle de Duhamel (HP)

Soit $\sum u_n$ une série telle que $\exists L \in \mathbb{R}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{L}{n} + o(1/n)$

i. si $L > 1$ alors $\sum u_n$ converge

ii. si $L < 1$ alors $\sum u_n$ diverge

6 Produit de Cauchy de deux séries numériques

théorème 18: Produit de Cauchy

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes.

On note $w_n = \sum\limits_{p+q=n} u_p v_q = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots u_{n-1} v_1 + u_n v_0$ pour tout $n \geqslant 0$

Alors la série de terme général w_n est absolument convergente et $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n)}$

rem: on notera que l'on n'a pas $(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n.v_n$

exemple 22: produit de Cauchy et fonction exponentielle

1. Montrer que pour tout complexe z, la série de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ est convergente.

   On rappelle que par définition on note $\boxed{\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} \text{ pour tout } z \text{ complexe}}$

2. Retrouver avec cette expression de $\exp(z)$ que $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$

exemple 23:

On considère le produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2^n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{3^n}$.

- Notons pour tout $n \geqslant 0, u_n = \dfrac{1}{2^n}$ et $v_n = \dfrac{1}{3^n}$
- Comme $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries géométriques ACV, on peut affirmer que le produit de Cauchy de ces deux séries est ACV lui-aussi.
- Posons $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k.v_{n-k}$.

  On a

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}.\frac{1}{3^{n-k}} = \frac{1}{3^n}.\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}.\frac{1}{3^{-k}} = \frac{1}{3^n}.\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{1}{3^n}.\frac{1-(3/2)^{n+1}}{1-3/2}$$

- D'après le théorème, on en déduit que $\sum w_n$ est ACV et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n)$.

  ce qui donne ici

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}.\frac{1-(3/2)^{n+1}}{1-3/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{1-1/2}.\frac{1}{1-1/3} = 3$$

7 Séries alternées (Hors Programme... mais si classique!)

définition 7: série alternée - HP

On appelle <u>série alternée</u> toute série $\sum u_n$ telle que pour tout n, $u_n.u_{n+1} < 0$

exemple 24: très important - à retenir

On note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geqslant 1$, et S_n la somme partielle d'indice n de $\sum u_n$.

Nous allons montrer que $\boxed{\sum \dfrac{(-1)^n}{n} \text{ est uné série convergente}}$

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont deux suites adjacentes.
2. En déduire que $\sum u_n$ est une série convergente.
3. Pour quelle valeur de n est-on sûr que S_n est une valeur approchée de la somme de la série à 10^{-2} près? Peut-on préciser si cette valeur approchée est par défaut? Par excès?

solution

1. Notons $A_n = S_{2n}$ et $B_n = S_{2n+1}$. Nous allons montrer que (A_n) et (B_n) sont deux suites adjacentes.
   - (A_n) est une suite décroissante car pour tout entier n on a
   $$A_{n+1} - A_n = S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} < 0$$
   - (B_n) est une suite croissante car pour tout entier n on a
   $$B_{n+1} - B_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0$$
   - $\lim A_n - B_n = 0$ car pour tout entier n on a $A_n - B_n = S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} \to 0$ <u>(produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0)</u>
2. - Nous avons montré que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont deux suites adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, on peut affirmer que: les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont convergentes, de même limite.
   - Or un théorème sur les suites(voyez-vous lequel?) nous permet alors d'affirmer que la suite (S_n) est une suite convergente!
   C'est la définition de $\sum u_n$ converge. cqfd!
3. Notons $l = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = \lim S_n = \lim A_n = \lim B_n$.
   - Comme (A_n) est décroissante de limite l on a pour $l \leqslant A_{n+1} \leqslant A_n$ pour tout n
   - Comme (B_n) est croissante de limite l on a pour $B_n \leqslant B_{n+1} \leqslant l$ pour tout n
   - Ainsi, on a pour tout n $\boxed{S_{2n+1} \leqslant S_{2n+3} \leqslant l \leqslant S_{2n+2} \leqslant S_{2n}}$
   - D'où pour tout n on a $0 \leqslant l - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+2}$
   On en déduit que la somme partielle S_{2n+1} est une valeur approchée de l à $\dfrac{1}{2n+2}$ près par défaut.
   - Et pour tout n on a $0 \geqslant l - S_{2n} \geqslant S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = \dfrac{-1}{2n+1}$
   On en déduit que la somme partielle S_{2n} est une valeur approchée de l à $\dfrac{1}{2n+1}$ par excès.
   - S_{99} fournit une valeur approchée de l à 0,01 près par défaut.

théorème 19: critère spécial de convergence des séries alternées - HP

Soit $\sum u_n$ une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroit et tend vers zéro.
Alors :

i.) la série $\sum u_n$ est une série convergente

ii.) pour tout entier n, la somme de la série est comprise entre deux sommes partielles consécutives, S_n et S_{n+1}

iii.) pour tout entier n, le reste d'ordre n, R_n est du même signe que u_{n+1}

iv.) pour tout entier n, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Ce théorème est hors-programme mais sa démonstration est très aisée: il suffit de prendre comme modèle l'exemple précédent.
C'est un exemple très riche puisqu'il mêle suites extraites, suites adjacentes,...

exemple 25:

Parmi les séries suivantes, indiquer celles que l'on peut étudier sans le critère spécial qui est hors programme

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \qquad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{2^{3n-4}} \qquad \sum (-1)^n \arcsin(\frac{1}{n})$$

théorème 20: convergence commutative- HP...mais utilisé en probas!

Soit $\sum u_n$ une série ACV alors pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ on a

$$\sum u_{\varphi(n)} \text{ qui est ACV et l'on a } \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

On retiendra en particulier que si une série de terme général positif converge alors elle est commutativement convergente(càd que l'ordre de sommation n'influe pas sur la nature de la série ni sa somme)

exemple 26: γ est la constante d'Euler

On rappelle le réultat suivant, sans doute démontré en exercice, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o_{+\infty}(1)$.

1. Montrer que $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p}$ converge et vaut $\ln 2$.
   (On pourra montrer que sa somme partielle d'indice $2n$ est égale à $T_{2n} - T_n$)
   On écrit parfois ce résultat comme suit $\boxed{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \cdots = \ln 2}$
2. Considérons maintenant la série $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$.
   Cette série converge-t-elle? Et si oui, sa somme est-elle encore $\ln 2$?
   Pour répondre, notons S_n la somme partielle d'indice n de cette série.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 1, S_{3n} = T_{4n} - \frac{1}{2}T_n - \frac{1}{2}T_{2n}$ puis que $\lim S_{3n} = \frac{3\ln 2}{2}$
   (b) Montrer que $\lim S_{3n+1} = \lim S_{3n+2} = \frac{3\ln 2}{2}$
   (c) Montrer que $\lim S_n = \frac{3\ln 2}{2}$
   (On pourra montrer d'une manière générale, en adaptant une démonstration faite en classe sur les suites extraites, que la suite (S_n) converge vers l ssi les trois suites extraites $(S_{3n}), (S_{3n+1})$ et (S_{3n+2}) convergent vers l)
   On vient de montrer que $\boxed{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3\ln 2}{2}}$

théorème 21: théorème classique sur les suites extraites - à savoir redémontrer

Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ Il y a équivalence entre :

i) la suite w tend vers l

ii) les deux suites extraites (w_{2n}) et (w_{2n+1}) tendent vers l

8 D'autres exemples

exemple 27: le contre-exemple classique qui prouve l'importance du signe stable!

On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

1. Montrer que les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la série de terme général u_n est convergente et donner un majorant de $|R_n|$ où R_n est le reste d'ordre n
2. Calculer un développement limité de v_n avec trois termes
3. En déduire que la série de terme général v_n est divergente

Solution:

1. *Utiliser le modèle que constitue l'exemple 24*
2. $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}} + o(\dfrac{1}{n^{1.5}})$
3. - *On a vu dans la question 1 que* $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *CV*
   - *On sait que* $\sum \dfrac{1}{2n}$ *DV et que* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ *est ACV*
   - On *sait aussi que* $\sum o(\dfrac{1}{n^{1.5}})$ *ACV*
   - *On peut donc affirmer que* $\sum v_n$ *DV (car somme d'une série DV et de trois CV)*

On a donc ici $u_n \sim v_n$ mais $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de natures différentes !

exemple 28: un exercice sur les suites... qui se traite grâce aux séries!

Déterminer la nature de la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$.

On va utiliser le ***théorème 1 lien suite-série***

- $u_n - u_{n-1} = \cdots = \dfrac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \dfrac{1}{n} + \ln\dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$
- *ainsi* $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \left[\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right] = \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$
- *comme* $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ *est de signe stable et que* $\sum v_n$ *est une série de Riemann convergente, on peut affirmer grâce à* ***la règle des équivalents****, que la série* $\sum u_n - u_{n-1}$ *est une série convergente*
- *d'après* ***le théorème lien suite-série****, on peut alors affirmer que la suite* (u_n) *est une suite convergente!*
- *rem: il est également possible d'étudier directement cette suite par son sens de variation puis d'utiliser le théorème des suites monotones, sans passer par la théorie des séries.*