SUITES NUMERIQUES REELLES

Serge Lemarquis

Table des matières

1 Définitions

définition 1: suite réelle

On appelle suite réelle toute fonction de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une telle suite est notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

remarque 1

On note $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ ou encore $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Il s'agit d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

remarque 2 (*mode de définition d'une suite*)

Il existe trois façons de définir une suite:

1. ***de façon explicite:*** *le terme u_n est donné par une formule en fonction de n.*
   exemple : $u_n = \arctan n + \cos n$ pour tout $n \geqslant 0$
2. ***de façon implicite:*** *le terme u_n n'est pas donnée par une formule, mais par une proposition qu'il est le seul réel à vérifier.*
   exemple: soit u_n l'unique racine sur $]0,1[$ de l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ pour tout $n \geqslant 2$
3. ***par récurrence:*** *le terme u_n est donné par une formule en fonction des termes précédents.*
   - *Lorsque la formule ne dépend que de u_{n-1}, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence d'ordre un.*
     exemple: soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$ pour tout $n \geqslant 1$
   - *Lorsque la formule ne dépend que de u_{n-1} et u_{n-2}, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence d'ordre deux.*
     exemple: soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $(u_0,u_1) = (1,2)$ et la relation $u_n = u_{n-1}^2.u_{n-2}^3$ pour tout $n \geqslant 2$
   - *On retrouve ce genre de suites en algèbre linéaire et en probabilités!*

En mathématiques, une même suite peut-être définie de manière équivalente aussi bien de manière explicite que par récurrence. En informatique, comme vous pouvez le voir en annexe, le choix n'est parfois pas anodin!

définition 2: majorée, minorée, croissante, décroissante,...

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que la suite u est :

i) majorée lorsque $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$
ii) minorée lorsque $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$
iii) bornée lorsque u est à la fois majorée et minorée.
iv) décroissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$
v) croissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$
vi) constante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$

remarque 3 (*très important*)

Dans la définition ci-dessous, les réels M et m ne doivent pas dépendre de n !
Par exemple, si l'on sait que l'on a $\forall n \geqslant 0, u_n \leqslant n^2$, on peut dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, mais on ne peut évidemment pas dire la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée.

exemple 1: techniques de majoration classiques

Soient les suites u et v définies par $\forall n \geqslant 0, u_n = \dfrac{(-1)^n n + 6}{n^2+4}$ et $v_n = n^5.e^{-n}$

Montrer que pour tout $n \geqslant 0$ on a $|u_n| \leqslant \dfrac{5}{2}$ et $v_n \leqslant 3125e^{-5}$

1. – Soit $n \geqslant 0$ fixé.
   D'après **l'inégalité triangulaire**, on a

$$|(-1)^n n + 6| \leqslant |(-1)^n n| + |6| = n + 6$$

   On en déduit que

$$|u_n| \leqslant \frac{n+6}{n^2+4} = \frac{n}{n^2+4} + \frac{6}{n^2+4}$$

   – En minorant le dénominateur 4, on obtient $\dfrac{6}{n^2+4} \leqslant \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$
   – Pour $\dfrac{n}{n^2+4}$ on va minorer le dénominateur par n^2,
     en prenant bien garde de le faire uniquement pour $n \geqslant 1$!
     Pour $n \geqslant 1$ on a $\dfrac{n}{n^2+4} \leqslant \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} \leqslant 1$
   – On a ainsi prouvé que pour tout $n \geqslant 1$ on a $|u_n| \leqslant 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$
   – Comme $|u_0| = \dfrac{3}{2} < \dfrac{5}{2}$, on peut affirmer que pour tout $n \geqslant 0$ on a $|u_n| \leqslant \dfrac{5}{2}$
   – *remarque: pour $n \geqslant 1$ on aurait pu également obtenir une majoration plus directe mais moins précise en minorant à chaque fois n^2+4 par n^2, ce qui donnait*

$$|u_n| \leqslant \frac{n+6}{n^2+4} \leqslant \frac{n+6}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{6}{n^2} \leqslant 1 + 6 = 7$$

2. Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & [0,+\infty[\end{array}$.
   On a pour tout $n \geqslant 0, v_n = f(n)$.
   *Pour montrer que la suite v est majorée par $3125e^{-5}$, **il suffit** de montrer qua la fonction f est majorée par $3125e^{-5}$.*
   – La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables,
     et l'on a $\forall x \geqslant 0, f'(x) = (5-x).x^4.e^{-x}$
   – Le signe de $f'(x)$ est évident à déterminer sous cette forme factorisée,
     ce qui permet de tracer le tableau suivant

x	0		5		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	0

   – On a montré que la fonction f est majorée par $f(5) = 3125.e^{-5}$, on peut en déduire que la suite v est majorée par cette même quantité.

.

On retiendra **la technique classique de majoration d'un quotient de deux nombres positifs**:
on majore le numérateur ou on minore le dénominateur.

théorème 1:
La suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ssi la suite réelle positive $|u| = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
rem: très souvent pour montrer qu'une suite est bornée on préférera majorer sa valeur absolue.

démonstration 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. *On suppose que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.*
   Par définition, ceci signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout entier n on a $|u_n| \leqslant M$.
   Ce que l'on peut encore écrire $-M \leqslant u_n \leqslant M$.
   Ecrit sous cette forme, il est clair que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée; en effet, elle est minorée par $-M$ et elle est majorée par M
2. *On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*
   Par définition, ceci signifie qu'il existe un réel m et un réel M
   tels que pour tout entier n on a $m \leqslant u_n \leqslant M$.
   On en déduit que pour tout entier n on a aussi $-M \leqslant -u_n \leqslant -m$
   Comme $|u_n| = \max(u_n, -u_n)$, il est clair qu'en posant $M_1 = \max(-m, M)$ on a pour tout entier n l'inégalité $|u_n| \leqslant M_1$.
   On vient de prouver que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

remarque 4 (*notion très importante : à partir d'un certain rang*)

- *On dit qu'une propriété portant sur une suite u est vraie à partir d'un certain rang, ou encore, pour n assez grand, lorsqu' elle est vraie pour tout n appartenant à un intervalle du type $[n_0, +\infty[$ avec n_0 entier fixé.*
  Par exemple, dire que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang signifie
  $$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_{n+1} \leqslant u_n$$
- *Lorsque l'on étudie une suite, c'est essentiellement son comportement au voisinage de l'infini qui nous intéresse: c'est pour cela que l'on se contente souvent de déterminer des propriétés "pour n assez grand"*

proposition 1

Il y a équivalence entre :
i) la suite u est bornée à partir d'un certain rang.
ii) la suite u est bornée.

définition 3: suite stationnaire
On dit que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\text{une suite } u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est stationnaire ssi } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_{n+1} = u_n.}$$

rem: une suite stationnaire est toujours une suite convergente mais la réciproque est fausse... Attention cependant au cas particulier des suites à valeurs entières, où l'on montre (voir poly. exos) qu'une suite de nombre entiers est convergente ssi elle est stationnaire!

exemple 2:

Considérons la suite $u = \left(\cos(\pi\left[\frac{6}{n+1}\right])\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite constante mais est une suite stationnaire. ([.] désigne la fonction partie entière)

En effet:

- $u_0 = \cos 6\pi = 1$ $\quad u_1 = \cos 3\pi = -1$ $\quad u_2 = \cos 2\pi = 1$
- $u_3 = \cos\frac{3\pi}{2} = 0 \quad u_4 = \cos\frac{6\pi}{5} \quad u_5 = \cos\pi = -1$
- pour $n \geqslant 6$, on a $\frac{6}{n+1} \in]0,1[$, et donc $\left[\frac{6}{n+1}\right] = 0$, et ainsi $u_n = \cos 0 = 1$

exemple 3: suite définie de manière implicite

u_n désigne la $n-$ième décimale de π. La suite (u_n) est-elle stationnaire?

Pour répondre à cette question, il faut les connaissances suivantes:

- tout nombre réel x possède un développement décimal
- si le développement décimal de x est fini alors x est un nombre décimal (c'est à dire le quotient d'un entier par une puissance de 10)
- si le développement décimal de x est infini et périodique alors x est un nombre rationnel (c'est à dire le quotient de deux entiers)
- si le développement décimal de x est infini et non périodique alors x est un nombre irrationnel (c'est à dire qu'il ne peux s'écrire comme le quotient de deux entiers)

On sait que π est un nombre irrationnel: la suite de ses décimales n'est donc pas staionnaire (ni même périodique)

définition 4: suite convergente

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

i) On dit que la suite u est <u>convergente</u> lorsque $\boxed{\exists l \in \mathbb{R}, \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| \leqslant \epsilon}$

ii) Dans le cas contraire, on dit que la suite u est <u>divergente.</u>

méthode 1: la relation $(u_n \to l)$ équivaut à la relation $(u_n - l \to 0)$

Pour démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers le réel l, on peut former la différence $u_n - l$ puis montrer que cette nouvelle suite tend vers zéro, par exemple en utilisant une majoration de la forme $|u_n - l| \leqslant v_n$ et en montrant que (v_n) converge vers 0.

exemple 4: recherche de valeur approchée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers π^2 et pour laquelle on sait que $\forall n \geqslant 100, |u_n - \pi^2| \leqslant \dfrac{1}{n^3}$.
Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de π^2 à 10^{-2} près.

- ce que l'on nous demande de manière plus précise, c'est la plus petite valeur de n pour laquelle on est certain que u_n est une valeur approchée de π^2 à 10^{-2} près.
- Déjà, on commence par remarquer que l'on ne peut rien dire à propos des termes qui ont un indice inférieur ou égal à 99. Peut-être y a-t-il l'un de ces termes qui est proche de π^2 à moins de 10^{-2}, mais on ne peut pas le savoir!
- Pour obtenir $|u_n - \pi^2| \leqslant 10^{-2}$, il suffit que n soit telle que $\dfrac{1}{n^3} \leqslant 10^{-2}$, c'est à dire $n \geqslant \sqrt[3]{100}$.
  Comme $4^3 = 64$ et $5^3 = 125$, on en déduit que $\dfrac{1}{n^3} \leqslant 10^{-2} \iff n \geqslant 5$
- Cependant, il ne faudrait surtout pas conclure que u_5 est la valeur approchée que l'on cherche (cf. remarque ci-dessus)!
- Conclusion: la plus petite valeur de n pour laquelle on peut affirmer que u_n est une v.a. de π^2 à 10^{-2} près est $n = 100$ (!)

remarque 5 (*une faute impardonnable*)

Une faute parfois commise est de dire :

"comme la suite (u_n) tend vers l alors pour n assez grand on a $u_n = l$".

Il s'agit, on peut le dire, d'une faute impardonnable car cela revient à dire qu'une suite convergente est forcément une suite stationnaire. Voici un contre-exemple:

la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ *est une suite qui tend vers* 0*, et pourtant* $\forall n \geqslant 1, u_n \neq 0$

définition 5: limite infinie

i) On dit que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque $\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A}$

ii) On dit que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ lorsque $\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant A}$

définition 6: suite extraite

On dit que la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une fonction g strictement croissante de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{g(n)}$.

exemple 5:

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites extraites de la suite (u_n).
En revanche la suite $(v_n) = (u_{n^2-10n+26})$ n'est pas une suite extraite de la suite (u_n)
En effet, la fonction $n \mapsto n^2 - 10n + 26$ n'est pas une fonction strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
On remarque cependant que les valeurs prises par la suite (v_n) sont des valeurs prises par la suite (u_n)

lemme 1

Soit g une fonction strictement croissante de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Alors: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, g(n) \geqslant n}$

démonstration 2

Soit g une fonction strictement croissante de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Nous allons montrer par récurrence la proposition $\mathcal{P}_n$: "$g(n) \geqslant n$"

- *initialisation: Comme g est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a forcément $g(0) \geqslant 0$.*
- *hérédité: on suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un $n \geqslant 0$ fixé quelconque.*
  Comme g est strictement croissante, on a $g(n+1) > g(n)$.
  Or par hypothèse de récurrence, on a $g(n) \geqslant n$. Par transitivité, cela donne $g(n+1) > n$.
  Comme g est à valeurs entières, dire que $g(n+1) > n$ équivaut à dire que $g(n+1) \geqslant n+1$.
  On a donc montré que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie
- *conclusion: par le principe de récurrence, on a montré que $\forall n \geqslant 0, g(n) \geqslant n$*

théorème 2: limite d'une suite extraite

Si la suite u tend vers la limite l (finie ou infinie) **alors** toute suite extraite de u tend vers l.

démonstration 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers la limite l.
Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{g(n)})$ une suite extraite.

1. *cas où $l = +\infty$. (On a donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A$)*
   Soit A un réel quelconque fixé.
   On peut affirmer, grâce à la définition, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant A$ pour $n \geqslant n_0$.
   D'après le lemme, si $n \geqslant n_0$ alors g étant strictement croissante on a $g(n) \geqslant g(n_0) \geqslant n_0$ (la dernière inégalité provient du lemme).
   On peut donc en déduire que si $n \geqslant n_0$ alors on a $v_n = u_{g(n)} \geqslant A$.
   Au final, on a montré que $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, v_n \geqslant A$. (On reconnait la définition de $\lim v_n = +\infty$)
2. *cas où $l \in \mathbb{R}$. (On a donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$)*
   Soit ε une réel strictement positif fixé.
   On peut affirmer, grâce à la définition, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| < \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$.
   D'après le lemme, si $n \geqslant n_0$ alors g étant strictement croissante on a $g(n) \geqslant g(n_0) \geqslant n_0$ (la dernière inégalité provient du lemme).
   On peut donc en déduire que si $n \geqslant n_0$ alors on a $|v_n - l| = |u_{g(n)} - l| \leqslant \varepsilon$.
   Au final, on a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |v_n - l| \leqslant \varepsilon$ (On reconnait la définition de $\lim v_n = l$)
3. *cas où $l = -\infty$*
   ...

remarque 6 (*la convergence d'une suite extraite est "plus rapide"*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers le réel l, et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite.

- *Par définition, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$*
- *D'après lé théorème précédent, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, |v_n - l| \leqslant \varepsilon$*
- *Dire que la suite extraite converge plus rapidement signifie que, pour un même $\epsilon > 0$ fixé quelconque, il existe toujours un n_1 tel que $n_1 \leqslant n_0$. (et ça, on l'a prouvé avec le lemme 1!)*

méthode 2: pour montrer qu'une suite ne possède pas de limite
il suffit d'exhiber deux suites extraites qui tendent vers des limites différentes.
Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \cos\frac{2n\pi}{5}$. Cette suite est divergente car:
- la suite (u_{5n}) converge vers 1 (c'est même la suite constante 1 !)
- la suite (u_{5n+1}) converge vers $\cos\frac{2\pi}{5} \neq 1$ (c'est même. . .)

théorème 3: à savoir redémontrer, très classique
Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ Il y a équivalence entre :
i) la suite u tend vers l
ii) les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers l

remarque 7

- *Cette proposition est importante : il suffit de savoir que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers la même limite pour pouvoir affirmer que la suite (u_n) tend elle aussi vers cette limite (et donc par application de la proposition 2 que toute suite extraite de (u_n) tend aussi vers l !)*
- *Dans la proposition précédente, les deux suites extraites n'ont pas été prises au hasard! Si vous prenez deux autres suites extraites, a priori, la proposition ne sera plus vraie.*

2 Des suites de référence

Dans ce qui suit, q désignera un réel ou un complexe fixé.

2.1 suites arithmétiques

définition 7: suite arithmétique
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison q si pour tout entier n, on a $u_{n+1} = u_n + q$

proposition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison q. Alors:
i) $\forall n \geqslant 0, u_n = u_0 + n.q$
ii) $\forall n \geqslant 0, \forall p \geqslant 0\; u_n = u_p + (n-p).q$
iii) une suite arithmétique converge ssi sa raison est nulle.(c'est alors une suite constante)
iv) si q est un réel strictement positif alors $\lim u_n = +\infty$
v) si q est un réel strictement négatif alors $\lim u_n = -\infty$

remarque 8 (*formule utile pour la somme de termes consécutifs*)

$\boxed{0+1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$ *pour tout entier* $n \geqslant 0$

remarque 9 (*définition par récurrence et forme explicite*)

On démontre aisément que les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

i) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

ii) il existe deux scalaires a et b tels que pour tout entier n on a $u_n = b + a.n$

(Et dans ce cas, a est la raison de la suite)

2.2 suites géométriques

définition 8: suites géométriques

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q si pour tout entier n, on a $u_{n+1} = q.u_n$

proposition 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors:

i) $\forall n \geqslant 0, u_n = u_0.q^n$

ii) $\forall n \geqslant 0, \forall p \geqslant 0\; u_n = u_p.q^{n-p}$

remarque 10 (*formule très importante*)

si $q \neq 1$, on a pour tout entier n : $\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

théorème 4: limite de (q^n) avec q réel (très important)

Soit q un réel fixé. Alors:

- si $|q| < 1$ alors $\lim q^n = 0$
- si $q = 1$ alors $\lim q^n = 1$
- si $q = -1$ alors la suite $(q^n) = ((-1)^n)$ ne possède pas de limite.
- si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$
- si $q < -1$ alors la suite (q^n) ne possède pas de limite mais $\lim(|q^n|) = +\infty$

théorème 5: limite de (q^n) avec q complexe

Soit q un complexe fixé. Alors:

- si $|q| < 1$ alors $\lim q^n = 0$
- si $|q| > 1$ alors la suite (q^n) diverge et $\lim |q^n| = +\infty$
- si $|q| = 1$ et $q \neq 1$ alors la suite (q^n) diverge mais $\lim |q^n| = 1$

remarque 11

Si on pose $q = r.e^{i\theta}$ on a alors $q^n = r^n.e^{in\theta}$.

La suite des modules de q^n est une suite géométrique de raison $|q|$.

La suites des arguments de q^n est une suite arithmétique de raison θ

remarque 12 (*définition par récurrence et forme explicite*)

On démontre aisément que les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

i) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

ii) il existe deux scalaires a et b tels que pour tout entier n on a $u_n = b.a^n$

(Et dans ce cas, a est la raison de la suite)

2.3 suites arithmético-géométriques

définition 9: suite arithmético-géométrique

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique lorsqu'il existe deux scalaires a et b tels que $u_{n+1} = a.u_n + b$ pour tout entier n

remarque 13

Le cas $a = 1$ [resp. $b = 0$] correspond à une suite arithmétique [resp. géométrique]

méthode 3: obtenir une formule explicite dans le cas où $a \neq 1$.

- On note l le scalaire qui vérifie l'égalité $l = a.l + b$
- On considère la suite auxiliaire v définie par $v_n = u_n - l$.
  La suite v_n est une suite géometrique de raison a, d'où $v_n = a^n.v_0$
- On revient au terme u_n: on a $u_n = l + a^n.(u_0 - l)$ pour tout entier n

exemple 6:

Soit a un réel différent de un et c une réel quelconque.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = c$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = a.u_n + 2$

1. Donner l'expression explicite de u_n
2. Donner une cns portant sur a et c pour que la suite converge.

Solution:

- On a $l = al + 2 \Longleftrightarrow (1-a).l = 2 \Longleftrightarrow l = \dfrac{2}{1-a}$ (car $a \neq 1$)
- Soit $n \geqslant 0$, on a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l = (a.u_n + 2) - (a.l + 2) = a.(u_n - l) = a.v_n$$

  Ceci prouve que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison a, on a donc $\forall n \geqslant 0, v_n = a^n.v_0$, ce qui donne $\forall n \geqslant 0, u_n = a^n.(c - \dfrac{2}{1-a}) + \dfrac{2}{1-a}$
- La suite (u_n) converge ssi $\boxed{(c = \dfrac{2}{1-a} \text{ et } a \text{ quelconque}) \text{ ou } (a \in]-1,+1] \text{ et } c \text{ quelconque})}$

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

- $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes.
- a et c sont deux scalaires non nuls fixés.
- b est un scalaire fixé.

On s'intéresse aux suites numériques (u_n), à valeurs dans $\mathbb{K}$, qui vérifient la relation de récurrence

$$a.u_{n+2} + b.u_{n+1} + c.u_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

définition 10: équation caractéristique

On appelle équation caractéristique de la suite récurrente l'équation du second degré

$$\boxed{aX^2 + bX + c = 0 \text{ (Ec)}}$$

dans la suite, Δ désignera le discriminant de cette équation.

théorème 6: expression explicite des suites à valeurs complexes

1. **Cas où** $\Delta \neq 0$:
   Notons alors r_1 et r_2 les racines distinctes de l'équation caractéristique.
   Alors :
   $$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_1^n + B.r_2^n$$
2. **Cas où** $\Delta = 0$:
   Notons alors r_0 la racine double de l'équation caractéristique.
   Alors :
   $$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_0^n + B.n.r_0^n$$

exemple 7:

Considérons $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe qui vérifie $\forall n \geqslant 1, u_{n+1} + 4u_{n-1} = 0$.
En appliquant le théorème précédent, on détermine l'expression explicite de (u_n):

$$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A(2i)^n + B(-2i)^n$$

théorème 7: expression explicite des suites à valeurs réelles

Ici, $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$.

1. **Cas où** $\Delta > 0$: Notons alors r_1 et r_2 les racines distinctes de l'équation caractéristique.
   Alors : $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_1^n + B.r_2^n$
2. **Cas où** $\Delta = 0$: Notons alors r_0 la racine double de l'équation caractéristique.
   Alors : $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.r_0^n + B.n.r_0^n$
3. **Cas où** $\Delta < 0$: Notons alors r_1 et r_2 les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
   alors : $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta)$ où q est le module de r_1 et θ un argument de r_1

exemple 8:

en reprenant l'exemple 7, mais en considérant, cette fois, uniquement les suites à valeurs réelles, on trouve, par application directe du théorème ci-dessus, que :

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n(A\cos(n\frac{\pi}{2}) + B\sin(n\frac{\pi}{2}))$$

3 Propriétés

théorème 8: Attention! La réciproque est fausse.

Si une suite est convergente alors elle est bornée (càd: ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée))
rem: la réciproque est bien sûr fausse comme l'atteste la suite $((-1)^n)$
rem: par contraposée, on peut dire que si une suite n'est pas bornée alors elle est divergente.

démonstration 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Notons l sa limite.

- *Par définition, on a $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leqslant \varepsilon$*
- *En particulier pour $\varepsilon = 1$ (nombre strictement positif (pris au hasard) fixé), on peut affirmer qu'il existe un entier n_0 fixé tel que pour tout entier n plus grand que n_0 on a $|u_n - l| \leqslant 1$, ou de manière équivalente, $l - 1 \leqslant u_n \leqslant l + 1$*
- *Considérons maintenant l'ensemble $U_{n_0} = \{u_n | n < n_0\} = \{u_n | n \in [\![0,n_0 - 1]\!]\}$.*
  Cet ensemble possède un nombre fini d'éléments réels (à savoir n_0): il possède donc un plus grand élément et un plus petit élément. Notons les respectivement M_{n_0} et m_{n_0}
- *Notons maintenant $M = \max(M_{n_0}, l + 1)$ et $m = \min(m_{n_0}, l - 1)$*
  Avec ce choix on a $M \geqslant l + 1$ et $M \geqslant M_{n_0}$ ainsi que $m \leqslant l - 1$ et $m \leqslant m_{n_0}$
- *Il est clair que l'on a $m \leqslant u_n \leqslant M$ pour tout entier n. En effet:*
  - *ou bien $n < n_0$, et donc $m_{n_0} \leqslant u_n \leqslant M_{n_0}$*
  - *ou bien $n \geqslant n_0$, et on a $l - 1 \leqslant u_n \leqslant l + 1$*

exemple 9:

Soit de nouveau la suite u définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n n + 6}{n^2 + 4}$.
Par exemple à l'aide d'un équivalent, il est facile de montrer que la suite (u_n) est une suite qui converge vers 0. Le théorème ci-dessus nous permet alors de justifier sans calculs que la suite u est bornée.

théorème 9: La combinaison linéaire de deux suites convergentes est encore une suite convergente

i) L'ensemble des suites convergentes est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
ii) L'ensemble des suites convergentes vers 0 est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
ceci implique en particulier que la somme de deux suites convergentes [vers 0] est une suite convergente[vers 0]

théorème 10: utilisé très souvent

Le produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée est une suite convergente vers 0.

exemple 10: très classique

Soit la suite u définie par $\forall n \geqslant 1, u_n = \dfrac{\cos n}{n}$.
La suite $(\cos n)$ ne possède pas de limite ... mais elle est tout de même bornée!
On va donc justifier que la suite u tend vers 0 en disant que c'est le produit d'une suite bornée *(la suite* $(\cos n)$*)* par une suite qui tend vers 0 *(la suite* $(\dfrac{1}{n})$*).*
rem: on utilise souvent ce raisonnement en présence de la suite $(\cos n)$ *ou* $(\sin n)$ *ou* $((-1)^n)$

théorème 11: image d'une suite par une fonction

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f une fonction définie sur un voisinage de a telle que $\lim_a f = l$ existe.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers a.
Alors, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l
rem: ***ce n'est rien d'autre qu'un théorème de composition de limites*** *que l'on peut écrire encore ainsi:*

$$si \lim_{n\to\infty} u_n = a \text{ et si } \lim_{x\to a} f(x) = l \text{ alors } \lim_{n\to\infty} f(u_n) = l$$

Dans le cas particulier où f est définie et continue en a, on a $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$

exemple 11:

Considérons f la fonction partie entière, et (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

- On a $\lim u_n = 1$ mais on n'a pas $\lim f(u_n) = f(1)$
- En effet, pour $n \geqslant 2$ on a $f(u_n) = 0$ et donc $\lim f(u_n) = 0$
  alors que $f(1) = 1$

théorème 12: théorème de convergence par encadrement (ex-des gendarmes)

Si à partir d'un certain rang $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et **si** $\lim v_n = \lim w_n$
alors la suite (u_n) possède une limite et l'on a $\lim u_n = \lim v_n = \lim w_n$
rem: on remarquera que l'existence de la limite de la suite (u_n) ne figure pas parmi les hypothéses du théorème ci-dessus. C'est d'ailleurs la preuve de l'existence de cette limite qui est l'élément essentiel de la démonstration du théorème.

exemple 12: rédaction du théorème de convergence par encadrement

Soit (u_n) un suite telle que $\forall n \geqslant 0, \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$.
Montrer que $\lim u_n = 0$
Réponse:

- **Déjà ce qu'il ne faut pas écrire sur sa copie!**
  Comme $0 = \lim \dfrac{1}{n} \leqslant \lim u_n \leqslant \lim \dfrac{2}{n} = 0$ *alors* $\lim u_n = 0$
- **Ce qu'il faut écrire:**
  Comme $\lim \dfrac{1}{n} = \lim \dfrac{2}{n} = 0$ *alors d'après le théorème de convergence par encadrement on peut affirmer que* $\lim u_n$ *existe et vaut* 0

théorème 13: théorème de divergence par minoration ou majoration

i) **Si** , à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n$ et si $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$
ii) **Si** , à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim u_n = -\infty$

théorème 14: théorème des suites monotones

i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.

a) **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et $\boxed{\lim u_n = \sup_n(u_n)}$

b) **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée **alors** $\boxed{\lim u_n = +\infty}$

ii) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.

a) **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et $\boxed{\lim u_n = \inf_n(u_n)}$

b) **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée **alors** $\boxed{\lim u_n = -\infty}$

en particulier, une suite strictement positive décroissante possède une limite finie positive ou nulle.

remarque 14 (*très important*)

Ainsi, on retiendra que:

- *une suite monotone possède toujours une limite (finie ou infinie)*
- *une suite croissante est convergente ssi elle est majorée.*
- *une suite décroissante est convergente ssi elle est minorée.*

définition 11: borne supérieure, borne inférieure d'un ensemble (rappels)

- Soit E un ensemble majoré.
  On appelle borne supérieure de E, et on note $\sup(E)$, le plus petit des majorants de E
- Soit E un ensemble minoré.
  On appelle borne inférieure de E, et on note $\inf(E)$, le plus grand des minorants de E

4 Etude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par son premier terme $u_0 \in I$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Quelques résultats immédiats:

- Si $f(I) \subset I$ alors tous les termes de la suite sont dans l'intervalle I.

  Dans la suite, on se place sous cette hypothèse.

- On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.
  Ainsi le sens de variation de la suite (u_n) est donné par le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$

- Si f est croissante sur I alors la suite (u_n) est monotone.
  (démonstration par récurrence sur n en partant de $u_0 \leqslant u_1$ ou $u_1 \leqslant u_0$)

- Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l alors $f(l) = l$.
  (lorsque f est continue, résoudre l'équation $f(l) = l$ permet de trouver les seules limites *possibles*)

5 Etude des suites définies de manière explicite: $u_n = f(n)$

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = f(n)$ pour tout entier n.
D'une manière générale,

les propriétés de la fonction f se transmettent à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Attention cependant: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ ce n'est pas la "même chose" !

théorème 15: les démonstrations doivent être sues

i) **Si** f est une fonction monotone sur $\mathbb{R}^+$ **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone (de même sens de variation que f)
ii) **Si** f est une fonction majorée sur $\mathbb{R}^+$ **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée
iii) **Si** f est une fonction minorée sur $\mathbb{R}^+$ **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée
iv) **Si** f tend vers une limite l en $+\infty$ **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l

Aucune des réciproques n'est vraie! Voici des contre-exemples!

i) *La fonction* $x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ *n'est pas monotone sur* $[0, +\infty[$ *et pourtant la suite* $(f(n))$ *est strictement croissante*
ii) *La fonction* $x \mapsto \sin(\pi.x).e^x$ *n'est ni majorée, ni minorée sur* $[0, +\infty[$ *et pourtant la suite* $(f(n))$ *est bornée (car constante égale à zéro)*
iii) *La fonction* $x \mapsto \sin(\pi.x).e^x$ *ne possède pas de limite en* $+\infty$ *et pourtant la suite* $(f(n))$ *converge. (dans ce cas* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *n'existe pas mais* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ *existe!)*

méthode 4: comment montrer qu'une fonction n'est pas majorée,...

Les contraposées des propositions du théorème précédent peuvent servir pour justifier qu'une fonction n'est pas majorée ou minorée qu'elle ne possède pas de limite.
Exemple:
Prouvons que la fonction $f : x \mapsto \sin(\pi.x).e^x$ *n'est pas majorée.*
Considérons la suite (u_n) *définie par* $u_n = f(2n + \frac{1}{2})$ *pour tout* $n \geqslant 0$
Pour $n \geqslant 0$ *on a* $u_n = f(2n + \frac{1}{2}) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}).e^{2n+1/2} = e^{2n+1/2}$ *et donc* $\lim u_n = +\infty$
Comme $\lim f(2n + \frac{1}{2})$ *on peut en déduire que* f *n'est pas une fonction majorée*

exemple 13: utilisation de la composition

Pour tout entier $n \geqslant 1$ *on pose* $u_n = \arcsin(\dfrac{1}{\text{ch}(\ln n)})$.
Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$

- la fonction ln est croissante de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$
- la fonction ch est croissante de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$
- la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante de $[1, +\infty[$ dans $]0,1]$
- la fonction arcsin est croissante de $]0,1]$ dans $]0,\pi/2]$
- par composition, on en déduit que la fonction $x \mapsto \arcsin(\dfrac{1}{\text{ch}(\ln x)})$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, et ainsi que la suite (u_n) est décroissante

6 Relations de comparaison

Soit (v_n) une suite de nombres réels non nuls.

définition 12: suite négligeable, suite dominée

i) On dit que la suite $u = (u_n)$ est négligeable devant la suite $v = (v_n)$, et on écrit $u_n = o(v_n)$, lorsque $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

ii) On dit que la suite $u = (u_n)$ est dominée par la suite $v = (v_n)$, et on écrit $u_n = O(v_n)$, lorsque la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée

remarque 15 (***Attention! "Dominer" n'est pas le contraire de "être négligeable"***)

Notons pour tout n, $u_n = n + 1$ et $v_n = 2n + 100^{100}$

- *La suite (v_n) domine la suite (u_n) .*
  En effet comme $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{2}$, on sait que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente, et donc par théorème elle est bornée! On a bien prouvé que $u_n = O(v_n)$
- *... mais la suite (u_n) domine aussi la suite (v_n) .*
  En effet comme $\lim \dfrac{v_n}{u_n} = 2$, on sait que la suite $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)$ est convergente, et donc par théorème elle est bornée! On a bien prouvé que $v_n = O(u_n)$
- *Comme une suite convergente est toujours bornée, on peut affirmer que*

$$\boxed{\text{si } u_n = o(v_n) \text{ alors } u_n = O(v_n). \text{ (mais la réciproque est fausse)}}$$

définition 13: suites équivalentes

Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites de nombres réels non nuls.
On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, et on écrit $u_n \sim v_n$, lorsque $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$
rem importante: ceci revient aussi à dire que $u_n = v_n + o(v_n)$

on a en effet les équivalences suivantes:

$$u_n = v_n + o(v_n) \iff u_n - v_n = o(v_n) \iff \frac{u_n - v_n}{v_n} \to 0 \iff \frac{u_n}{v_n} - 1 \to 0 \iff \frac{u_n}{v_n} \to 1$$

théorème 16:

i) Si $u_n \sim v_n$ alors, à partir d'un certain rang, le signe de u_n est égal à celui de v_n.

ii) Si $u_n \sim v_n$ et si (v_n) tend vers l alors (u_n) tend vers l

En effet, comme $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, on a donc à partir d'un certain rang $\dfrac{u_n}{v_n} > 0$, et par conséquent u_n et v_n sont forcément de même signe.

remarque 16

formule de Stirling (H.P.) On a $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}$

7 Suites adjacentes

Il faut bien faire la différence entre la définition et le théorème!

définition 14: suites adjacentes

On dit que les deux suites réelles u et v sont adjacentes lorsque :

i) u *est une suite croissante.*

ii) v *est une suite décroissante.*

iii) $\lim(u_n - v_n) = 0$

remarque 17 (Attention !)

Dire seulement que $\lim(u_n - v_n) = 0$ *n'implique pas que* $\lim u_n = \lim v_n$ *! Pourquoi?*
Lorsque l'on écrit $\lim u_n = \lim v_n$ *cela suppose que les* (u_n) *et* (v_n) *possède une limite, alors que lorsque l'on écrit* $\lim(u_n - v_n) = 0$ *on peut très bien avoir* (u_n) *et* (v_n) *qui ne possèdent pas de limite comme l'atteste l'exemple* $u_n = v_n = (-1)^n$

théorème 17: théorème des suites adjacentes

Si *u et v sont deux suites adjacentes* ***alors***

i) u et v sont deux suites convergentes, de même limite.

ii) de plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \lim u_n = \lim v_n \leqslant v_n$.

exemple 14: un exemple classique

On considère les suites définies pour $n \geqslant 1$*:*

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1. *Montrer que* (u_n) *et* (v_n) *convergent vers la même limite* l
2. *Déterminer une valeur approchée de* l *à* 10^{-3} *près.*

Voyons quelques élèments de réponse:

- *Il est facile de vérifier que* (u_n) *est une suite croissante et que* $\lim(u_n - v_n) = 0$
- *Il n'est pas difficile de montrer que* (v_n) *est une suite décroissante.*
- *D'après le théorème, on peut écrire que pour tout entier* $n \geqslant 1$ *on a* $u_n \leqslant l \leqslant v_n$
- *On peut écrire que* $0 \leqslant l - u_n \leqslant v_n - u_n = \dfrac{1}{n!}$
  Cette inégalité peut (et doit!) s'interpréter de la manière suivante: u_n *est une valeur approchée de* l *à* $1/n!$ *près*
- *Le plus petit* n *tel que* $1/n! \leqslant 10^{-3}$ *est* $n = 7$ *(car* $6! = 720$ *et* $7! = 5040$*)*
- $u_7 = \sum_{p=0}^{7} \frac{1}{p!} = \frac{685}{252} \approx 2.718$ *est une v.a. de* l *à* 10^{-3} *près*

8 Suites à valeurs complexes

définition 15: suite complexe

On appelle suite complexe toute fonction de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Une telle suite est notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

remarque 18

On note $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ ou encore $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes. Il s'agit d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

définition 16: suite complexe bornée

On dit que la suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée lorsque la suite réelle positive $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

remarque 19

Pourquoi ne pas reprendre la définition avec minorant et majorant ?

définition 17: suite complexe convergente

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

i) On dit que la suite u est convergente lorsque $\exists\, l \in \mathbb{C}, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| \leqslant \epsilon$

ii) Dans le cas contraire, on dit que la suite u est divergente.

théorème 18:

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Pour tout n, on note $x_n = Re(u_n)$ et $y_n = Im(u_n)$.
On a alors l'équivalence entre :

1. *la suite complexe (u_n) converge vers $l = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*
2. *les suites réelles (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers x et y.*

remarque 20

Le théorème précédent permet de ramener l'étude d'une suite complexe à l'étude de deux suites réelles.

remarque 21

En revanche, comme le prouve le contre-exemple ci-dessous la proposition suivante est fausse :
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite des modules et la suite des arguments convergent.

Soit la suite u définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{\exp(in\pi)}{n}$.

Cette suite tend vers 0, la suite des modules tend vers 0, mais la suite des arguments n'est pas convergente!