Symétries surfaces

exercice 1

On considère la nappe paramétrée $(\mathbb{R}^2, f)$ définie par

$$\begin{cases} x(u,v) &= u^2.v^2 \\ y(u,v) &= u.v^2 \\ z(u,v) &= u^2.v^3 \end{cases}$$

Déterminer des symétries laissant la surface globalement invariante.

exercice 2

On considère la nappe paramétrée $(\mathbb{R}^2, f)$ définie par

$$\begin{cases} x(u,v) &= u.v \\ y(u,v) &= u.v^2 \\ z(u,v) &= u^2.v \end{cases}$$

Déterminer des symétries laissant la surface globalement invariante.

exercice 3

On considère la nappe paramétrée $(\mathbb{R}^2, f)$ définie par

$$\begin{cases} x(u,v) &= u.v \\ y(u,v) &= u.(1-v) \\ z(u,v) &= u^2.v.(1-v) \end{cases}$$

Déterminer des symétries laissant la surface globalement invariante.

exercice 4

On considère la surface S d'équation cartésienne $x^2 + 3y^2 - z = 4$.
Déterminer des symétries laissant S globalement invariante.

exercice 5

On considère la surface S d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 4z^2$.
Déterminer des symétries laissant S globalement invariante.

exercice 6

Solutions

résolution 1 On remarque que:

- pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{cases} x(-u,v) &= x(u,v) \\ y(-u,v) &= -y(u,v) \\ z(-u,v) &= z(u,v) \end{cases} \qquad \text{et ainsi} \qquad M(-u,v) = s_{xOz}(M(u,v))$$

La surface est globalement par la symétrie par rapport au plan xOz

- pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{cases} x(u,-v) &= x(u,v) \\ y(u,-v) &= y(u,v) \\ z(u,-v) &= -z(u,v) \end{cases} \qquad \text{et ainsi} \qquad M(u,-v) = s_{xOy}(M(u,v))$$

La surface est globalement par la symétrie par rapport au plan xOy

- pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{cases} x(-u,-v) &= x(u,v) \\ y(-u,-v) &= -y(u,v) \\ z(-u,-v) &= -z(u,v) \end{cases} \qquad \text{et ainsi} \qquad M(-u,v) = s_{Ox}(M(u,v))$$

La surface est globalement par la symétrie par rapport à l'axe (Ox)

résolution 2 On remarque que:

- pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{cases} x(-u,v) & = -x(u,v) \\ y(-u,v) & = -y(u,v) \\ z(-u,v) & = z(u,v) \end{cases} \qquad \text{et ainsi} \qquad M(-u,v) = s_{Oz}(M(u,v))$$

La surface est globalement invariante par la symétrie par rapport à l'axe (Oz)
rem: il s'agit aussi de la rotation d'axe (Oz) et d'angle π

- pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{cases} x(u,-v) & = -x(u,v) \\ y(u,-v) & = y(u,v) \\ z(u,-v) & = -z(u,v) \end{cases} \qquad \text{et ainsi} \qquad M(u,-v) = s_{Oy}(M(u,v))$$

La surface est globalement invariante par la symétrie par rapport à l'axe (Oy)

- pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{cases} x(-u,-v) & = x(u,v) \\ y(-u,-v) & = -y(u,v) \\ z(-u,-v) & = -z(u,v) \end{cases} \qquad \text{et ainsi} \qquad M(-u,-v) = s_{Ox}(M(u,v))$$

La surface est globalement invariante par la symétrie par rapport à l'axe (Ox)
remarque: cette symétrie n'est rien d'autre que la composée des symétries s_{Oz} et s_{Oy} !

- pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{cases} x(v,u) & = x(u,v) \\ y(v,u) & = z(u,v) \\ z(v,u) & = y(u,v) \end{cases} \qquad \text{et ainsi} \qquad M(v,u) = s_{y=z}(M(u,v))$$

La surface est globalement invariante par la symétrie par rapport au plan d'équation $y = z$

remarque: à partir de la, on en déduit d'autres transformations qui laissent globalement invariante la surface: à savoir les composées des symétries précédentes avec la symétrie par rapport au plan d'équation $y = z$. Ces composées ne sont cependant pas des symétries mais des anti-rotations: c'est pour cela que je m'arrête ici!

$\boxed{\textbf{résolution 3}}$ On remarque que:

- pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{cases} x(-u,v) &= -x(u,v) \\ y(-u,v) &= -y(u,v) \\ z(-u,v) &= z(u,v) \end{cases} \qquad \text{et ainsi} \qquad M(-u,v) = s_{Oz}(M(u,v))$$

  La surface est globalement invariante par la symétrie par rapport à l'axe (Oz)
  rem: il s'agit aussi de la rotation d'axe (Oz) et d'angle π

- pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{cases} x(u,1-v) &= y(u,v) \\ y(u,1-v) &= x(u,v) \\ z(u,1-v) &= z(u,v) \end{cases} \qquad \text{et ainsi} \qquad M(u,1-v) = s_{x=y}(M(u,v))$$

  La surface est globalement invariante par la symétrie par rapport au plan d'équation $x = y$

- pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{cases} x(-u,1-v) &= -y(u,v) \\ y(-u,1-v) &= -x(u,v) \\ z(-u,1-v) &= z(u,v) \end{cases} \qquad \text{et ainsi} \qquad M(-u,1-v) = s_{x=-y}(M(-u,v))$$

  La surface est globalement invariante par la symétrie par rapport au plan d'équation $x = -y$

résolution 4

- Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
  On a l'équivalence
  $$x^2 + 3y^2 - z = 4 \Longleftrightarrow (-x)^2 + 3y^2 - z = 4$$
  c'est à dire géométriquement
  $$M = (x,y,z) \in S \Longleftrightarrow M' = (-x,y,z) \in S$$
  Comme $M' = s_{yOz}(M)$,
  on en déduit que S est globalement invariante par la symétrie par rapport au plan yOz

- Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
  On a l'équivalence
  $$x^2 + 3y^2 - z = 4 \Longleftrightarrow x^2 + 3(-y)^2 - z = 4$$
  c'est à dire géométriquement
  $$M = (x,y,z) \in S \Longleftrightarrow M' = (x,-y,z) \in S$$
  Comme $M' = s_{xOz}(M)$,
  on en déduit que S est globalement invariante par la symétrie par rapport au plan xOz

- Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
  On a l'équivalence
  $$x^2 + 3y^2 - z = 4 \Longleftrightarrow (-x)^2 + 3(-y)^2 - z = 4$$
  c'est à dire géométriquement
  $$M = (x,y,z) \in S \Longleftrightarrow M' = (-x,-y,z) \in S$$
  Comme $M' = s_{Oz}(M)$,
  on en déduit que S est globalement invariante par la symétrie par rapport à l'axe Oz

résolution 5

- Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

  On a l'équivalence
  $$x^2 - y^2 = 4z^2 \iff (-x)^2 + y^2 = 4z^2$$
  c'est à dire géométriquement
  $$M = (x,y,z) \in S \iff M' = (-x,y,z) \in S$$
  Comme $M' = s_{yOz}(M)$,
  on en déduit que S est globalement invariante par la symétrie par rapport au plan yOz

- On a
  $$M = (x,y,z) \in S \iff M' = (x,-y,z) \in S$$
  donc S est globalement invariante par la symétrie par rapport au plan xOz

- On a
  $$M = (x,y,z) \in S \iff M' = (x,y,-z) \in S$$
  donc S est globalement invariante par la symétrie par rapport au plan xOy

- On a
  $$M = (x,y,z) \in S \iff M' = (-x,-y,z) \in S$$
  donc S est globalement invariante par la symétrie par rapport à l'axe Oz

- On a
  $$M = (x,y,z) \in S \iff M' = (x,-y,-z) \in S$$
  donc S est globalement invariante par la symétrie par rapport à l'axe Ox

- On a
  $$M = (x,y,z) \in S \iff M' = (-x,y,-z) \in S$$
  donc S est globalement invariante par la symétrie par rapport à l'axe Oy

- On a
  $$M = (x,y,z) \in S \iff M' = (-x,-y,-z) \in S$$
  donc S est globalement invariante par la symétrie de centre O

$\boxed{\textbf{résolution 6}}$