Surface de révolution

exercice 1

On considère la surface S de paramétrisation

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\sin u.\cos(2v)-\sin(2v), \sin u.\sin(2v)+\cos(2v), \cos u) \end{array}$$

Justifier que S est une surface de révolution d'axe (Oz)

exercice 2

Solutions

résolution 1 • Nous allons montrer que l'image de tout point de S par toute rotation d'axe (Oz) est encore un point de S

• Soit $M(x,y,z)$ un point de S

Il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin u.\cos(2v) - \sin(2v) \\ \sin u.\sin(2v) + \cos(2v) \\ \cos u \end{pmatrix}$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Notons $M'(x',y',z')$ l'image de $M(x,y,z)$ par la rotation d'angle θ et d'axe (Oz).
On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sin u.\cos(2v) - \sin(2v) \\ \sin u.\sin(2v) + \cos(2v) \\ \cos u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin u.(\cos(2v)\cos\theta - \sin(2v)\sin\theta) - \sin(2v)\cos\theta - \cos(2v)\sin\theta \\ \sin u.(\cos(2v)\sin\theta + \sin(2v)\cos\theta) - \sin(2v)\sin\theta + \cos(2v)\cos\theta \\ \cos u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin u.\cos(2v+\theta) - \sin(2v+\theta) \\ \sin u.\sin(2v+\theta) + \cos(2v+\theta) \\ \cos(u) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin u.\cos(2(v+\theta/2)) - \sin(2(v+\theta/2)) \\ \sin u.\sin(2(v+\theta/2)) + \cos(2(v+\theta/2)) \\ \cos(u) \end{pmatrix} \\
&= f(u,v+\frac{\theta}{2})
\end{aligned}$$

Ce qui prouve bien que $M' \in S$!

$\boxed{\textbf{résolution 2}}$