Paramétrique $\Longleftrightarrow$ cartésien

exercice 1

On considère

- Σ *la surface d'équation cartésienne* $x^2-2xy+z=0$
- S *le support de la nappe paramétrée* $(\mathbb{R}^2,f)$ *avec*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v)=(u+v,u,u^2-v^2) \end{array}$$

Montrer $\Sigma = S$

exercice 2

On considère

- Σ *la surface d'équation cartésienne* $xy-z=0$
- S *le support de la nappe paramétrée* $(\mathbb{R}^2,f)$ *avec*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v)=(u+v,u-v,u^2-v^2) \end{array}$$

Montrer $\Sigma = S$

exercice 3

On considère la nappe paramétrée $(\mathbb{R}^2,f)$ *avec*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (2\cos u, \sin u, u+v) \end{array}$$

Démontrer qu'une équation cartésienne de cette nappe est $x^2+4y^2=4$

exercice 4 (***)

On considère la nappe paramétrée $(\mathbb{R}^2,f)$ *avec*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u.\sin v, u, \cos v) \end{array}$$

Déterminer une équation cartésienne de cette nappe.

exercice 5

On considÃ¨re

- Σ *la surface d'Ã©quation* $x^2+y^2-z^2=1$
- S *le support de la nappe paramÃ©trÃ©e* $(\mathbb{R}^2,f)$ *avec*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u.\cos v - \sin v, u.\sin v + \cos v, u) \end{array}$$

exercice 6

Solutions

résolution 1 • Nous allons procéder par double inclusion.

- $\boxed{\text{Montrons que } S \subset \Sigma}$

  Soit $P = (x,y,z)$ un point de S

  Il existe donc $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel $P = M(u,v)$ c'est à dire $\begin{cases} x &= u+v \\ y &= u \\ z &= u^2 - v^2 \end{cases}$

  On a alors

  $$x^2 - 2xy + z = (u+v)^2 - 2(u+v).u + u^2 - v^2 = u^2 + 2uv + v^2 - 2u^2 - 2uv + u^2 - v^2 = 0$$

  ce qui prouve que P est un point de Σ

- $\boxed{\text{Montrons que } \Sigma \subset S}$

  Soit $P = (x,y,z)$ un point de Σ.
  On a donc $x^2 - 2xy + z = 0$, et on souhaite montrer qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = M(u,v)$

  Posons $u = y$ et $v = x - y$.

  On a alors déjà $y = u$ et $x = v + y = v + u$.

  Comme $x^2 - 2xy + z = 0$, on a

  $$z = 2xy - x^2 = 2(v+u).u - (v+u)^2 = 2uv + 2u^2 - v^2 - u^2 - 2uv = u^2 - v^2$$

  On a bien montré qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = (u+v,u,u^2 - v^2) = M(u,v)$
  ce qui prouve que P est un point de S

résolution 2 • Nous allons procéder par double inclusion.

- $\boxed{\text{Montrons que } S \subset \Sigma}$

  Soit $P = (x,y,z)$ un point de S

  Il existe donc $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel $P = M(u,v)$ c'est à dire $\begin{cases} x &= u+v \\ y &= u-v \\ z &= u^2 - v^2 \end{cases}$

  On a alors
  $$xy - z = (u+v)(u-v) - (u^2 - v^2) = u^2 - v^2 - u^2 + v^2 = 0$$
  ce qui prouve que P est un point de Σ

- $\boxed{\text{Montrons que } \Sigma \subset S}$

  Soit $P = (x,y,z)$ un point de Σ.
  On a donc $xy - z = 0$, et on souhaite montrer qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = M(u,v)$
  Pour cela en considérant au brouillon le système $\begin{cases} x &= u+v \\ y &= u-v \end{cases}$ *cela nous invite à écrire*

  Posons $u = \dfrac{x+y}{2}$ et $v = \dfrac{x-y}{2}$.

  On a alors déjà $u + v = x$ et $u - v = y$.

  Comme $xy - z = 0$, on a
  $$z = xy = (u+v)(u-v) = u^2 - v^2$$

  On a bien montré qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = (u+v, u-v, u^2 - v^2) = M(u,v)$
  ce qui prouve que P est un point de S

résolution 3

- On note
  - Σ la surface d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 4$
  - S le support dela nappe paramétrée $(\mathbb{R}^2,f)$

- Nous allons procéder par double inclusion pour montrer que $S = \Sigma$

- $\boxed{\text{Montrons que } S \subset \Sigma}$

  Soit $P = (x,y,z)$ un point de S

  Il existe donc $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel $P = M(u,v)$ c'est à dire $\begin{cases} x &= 2\cos u \\ y &= \sin u \\ z &= u + v \end{cases}$

  On a alors
  $$x^2 + 4y^2 = 4\cos^2 u + 4\sin^2 u = 4$$
  ce qui prouve que P est un point de Σ

- $\boxed{\text{Montrons que } \Sigma \subset S}$

  Soit $P = (x,y,z)$ un point de Σ.
  On a donc $x^2 + 4y^2 = 4$, et on souhaite montrer qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = M(u,v)$

  Comme on a $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$, on sait que l'on peut affirmer par théorème qu'il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que
  $$\begin{cases} \dfrac{x}{2} &= \cos u \\ y &= \sin u \end{cases} \qquad \text{c'est à dire} \begin{cases} x &= 2\cos u \\ y &= \sin u \end{cases}$$

  Posons alors $v = z - u$, et on a alors bien $z = u + v$

  On a bien montré qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = (2\cos u, \sin u, u + v) = M(u,v)$
  ce qui prouve que P est un point de S

résolution 4 • On note
- Σ la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2z^2 = y^2$ avec $|z| \leqslant 1$
- S le support dela nappe paramétrée $(\mathbb{R}^2,f)$

• Nous allons procéder par double inclusion pour montrer que $S = \Sigma$

• $\boxed{\text{Montrons que } S \subset \Sigma}$

Soit $P = (x,y,z)$ un point de S

Il existe donc $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel $P = M(u,v)$ c'est à dire $\begin{cases} x &= u \sin v \\ y &= u \\ z &= \cos v \end{cases}$

On a alors
$$x^2 + y^2z^2 = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2 = y^2 \text{ et } |z| = |\cos v| \leqslant 1$$
ce qui prouve que P est un point de Σ

• $\boxed{\text{Montrons que } \Sigma \subset S}$

Soit $P = (x,y,z)$ un point de Σ.
On a donc $x^2 + y^2.z^2 = y^2$ et $|z| \leqslant 1$, et on souhaite montrer qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = M(u,v)$

On pose déjà $u = y$.
On envisage maintenant deux cas:

i) si $y \neq 0$.
Comme $x^2 + y^2z^2 = y^2$ on a $z^2 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = 1$.
On peut ainsi affirmer par théorème qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos v$ et $\dfrac{x}{y} = \sin v$.
On a alors $x = y.\sin v = u.\sin v, y = u$ et $z = \cos v$. On a prouvé que dans ce cas il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = (u.\sin v,u, \cos v) = M(u,v)$

ii) si $y = 0$.
Comme $x^2 + y^2z^2 = y^2$ on a $x = 0$ et ainsi $P = (0,0,z)$
Comme $|z| \leqslant 1$, on peut affirmer qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos v$
Avec $u = 0$, cela nous donne bien $(u.\sin v,u, \cos v) = (0,0,z) = P$
On a prouvé que dans ce cas aussi il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = (u.\sin v,u, \cos v) = M(u,v)$

On a justifié que dans tous les cas P est un point de S

résolution 5 • Nous allons procéder par double inclusion pour montrer que $S = \Sigma$

- $\boxed{\text{Montrons que } S \subset \Sigma}$

Soit $P = (x,y,z)$ un point de S

Il existe donc $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel $P = M(u,v)$ c'est à dire $\begin{cases} x &= u\cos v - \sin v \\ y &= u\sin v + \cos v \\ z &= u \end{cases}$

On a alors

$$x^2 + y^2 - z^2 = (u.\cos v - \sin v)^2 + (u.\sin v + \cos v)^2 - u^2 = \cdots = 1$$

ce qui prouve que P est un point de Σ

- $\boxed{\text{Montrons que } \Sigma \subset S}$

Soit $P = (x,y,z)$ un point de Σ.
On a donc $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, et on souhaite montrer qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = M(u,v)$

On pose dÃ©jÃ $\underline{u = z}$ Ensuite, on veut montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x &= u.\cos v - \sin v) \\ y &= u.\sin v + \cos v \end{cases} \text{ qui Ã©quivaut Ã } \begin{cases} \cos v &= \dfrac{ux+y}{u^2+1} = \dfrac{zx+y}{z^2+1} \\ \sin v &= \dfrac{uy-x}{u^2+1} = \dfrac{zy-x}{z^2+1} \end{cases}$$

Pour cela, nous allons dÃ©jÃ montrÃ© que $\left(\dfrac{zx+y}{z^2+1}\right)^2 + \left(\dfrac{yz-x}{z^2+1}\right)^2 = 1$
On a

$$\left(\frac{zx+y}{z^2+1}\right)^2 + \left(\frac{yz-x}{z^2+1}\right)^2 = \frac{z^2x^2 + y^2 + y^2 + x^2}{(1+z^2)^2} = \frac{(x^2+y^2)(z^2+1)}{(1+z^2)^2} = \frac{x^2+y^2}{1+z^2} = 1$$

On peut donc affirmer par thÃ©orÃ¨me qu'<u>il existe $v \in \mathbb{R}$</u> tel que $\begin{cases} \cos v &= \dfrac{zx+y}{z^2+1} \\ \sin v &= \dfrac{zy-x}{z^2+1} \end{cases}$

Or de ce systÃ¨me, on arrive en isolant x et y Ã $\begin{cases} x &= u.\cos v - \sin v \\ y &= u.\sin v + \cos v \end{cases}$

On a montrÃ© qu'il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x &= u\cos v - \sin v \\ y &= u\sin v + \cos v \\ z &= u \end{cases}$

C'est Ã dire, on a bien justifié que P est un point de S!

$\boxed{\textbf{résolution 6}}$