diagonalisation

exercice 1 (*)

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

exercice 2 (*)

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 25 \\ -5 & -4 & -25 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

exercice 3 (***)

Pour $k \in \mathbb{C}$, *on note* $A_k = \begin{pmatrix} k-3 & -5+k & 4-k \\ -k+3 & 5-k & k-3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Diagonaliser A_k *lorsque celle-ci est diagonalisable*

exercice 4 (*)

Solutions

$\boxed{\textbf{résolution 1}}$ La méthode classique donne successivement:

- $\chi_A(X) = (X+2)(X-3)$

  ici A vérifie la condition suffisante de diagonalisabilité:

  Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable (et chaque sep est de dimension 1)

  La matrice A est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- La recherche de sep donne $E_{-2}(A) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ et $E_3(A) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$
- En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a ainsi $A = P.D.P^{-1}$

$\boxed{\textbf{résolution 2}}$ La méthode classique donne successivement

- $\chi_A(X) = (X-1)(X+4)^2$

  Ainsi $sp(A) = \{1, -4\}$ avec $m(1) = 1$ et $m(-4) = 2$

- La recherche de $E_{-4}(A)$ donne $E_{-4}(A) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

  Ainsi $\dim E_{-4}(A) = 2$

- **A ce point, on peut affirmer que A est diagonalisable!**

  En effet, comme 1 est une valeur propre simple, on sait par théorème que $\dim E_1(A) = 1$

  Comme $\dim E_1(A) + \dim E_{-4}(A) = 3$,
  A **vérifie la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité!**

  La matrice A est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Un calcul donne $E_1(A) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$

- En notant $P = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a ainsi $A = P.D.P^{-1}$

résolution 3

- On a
$$\chi_{A_k}(X)=\begin{vmatrix} X-k+3 & 5-k & k-4\\ k-3 & X+k-5 & 3-k\\ 2 & 2 & X-3\end{vmatrix}$$
En effectuant les transvections $L_1 \longleftarrow L_1+L_2$ puis $C_1 \longleftarrow C_1-C_2$ on obtient
$$\chi_{A_k}(X)=\begin{vmatrix} X & X & -1\\ k-3 & X+k-5 & 3-k\\ 2 & 2 & X-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & X & -1\\ -X+2 & X+k-5 & 3-k\\ 0 & 2 & X-3\end{vmatrix}$$
En développant alors suivant la première colonne, on obtient
$$\chi_{A_k}(X)=(X-2)\begin{vmatrix} X & -1\\ 2 & X-3\end{vmatrix}=(X-2)(X^2-3X+2)=(X-2)^2(X-1)$$

- Ainsi $\boxed{sp(A_k)=\{1{,}2\} \text{ avec } m(1)=1 \text{ et } m(2)=2}$

- Comme 1 est une valeur propre simple, on sait par théorème que $\boxed{\dim E_1(A)=1}$.

- Nous allons déterminer $\dim E_2(A)$ en utilisant le théorème du rang.
  Le théorème du rang appliqué à la matrice $A-2I_3$ donne
$$\dim E_2(A)=\dim\ker(A-2I_3)=3-\mathrm{rg}(A-2I_3)$$
  On détermine le rang de $A-2I_3$ par la méthode du pivot.

  En effectuant $L_3 \longleftarrow \dfrac{-1}{2}L_3$ puis en échangeant $L_1 \longleftrightarrow L_3$ on obtient
$$A-2I_3=\begin{pmatrix} k-5 & k-5 & 4-k\\ 3-k & 3-k & k-3\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix} k-5 & k-5 & 4-k\\ 3-k & 3-k & k-3\\ 1 & 1 & -1/2\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2\\ k-5 & k-5 & 4-k\\ 3-k & 3-k & k-3\end{pmatrix}$$
  En effectuant les transvections $L_2 \longleftarrow L_2-(k-5)L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3-(3-k)L_1$ cela donne
$$A-2I_3\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & (3-k)/2\\ 0 & 0 & (k-3)/2\end{pmatrix}$$
  Enfin, $L_3 \longleftarrow L_3+L_2$ donne
$$A-2I_3\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & (3-k)/2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
  On en déduit ainsi que $\mathrm{rg}(A-2I_3)=\begin{cases} 2 & \text{si } k\neq 3\\ 1 & \text{si } k=3\end{cases}$ et donc $\boxed{\dim E_2(A)=\begin{cases} 1 & \text{si } k\neq 3\\ 2 & \text{si } k=3\end{cases}}$

- On a donc les équivalences
$$A \text{ diagonalisable } \Longleftrightarrow \dim E_1(A)+\dim E_2(A)=4 \Longleftrightarrow k=3$$
  et dans ce cas la matrice A est semblable à la matrice $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

- Dans le cas $k = 3$, la recherche des sep donne $E_1(A) = \text{vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix})$ et $E_2(A) = \text{vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix})$
- En notant $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, on a ainsi $A = P.D.P^{-1}$

$\boxed{\textbf{résolution 4}}$