Rayon d'une série entière (2A)

exercice 1 (*)

Déterminer le rayon de la série entière $\sum a_n.z^n$ *avec* $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

exercice 2 (*)

Déterminer le rayon de la série entière $\sum a_n.z^n$ *avec* $a_n = \dfrac{n^2}{4^n+n}$

exercice 3 (***)

Déterminer le rayon de la série entière $\sum a_n.z^n$ *avec* $a_n = \dfrac{\cos(n.\pi/3)}{\sqrt{n}}$

exercice 4

Déterminer le rayon de la série entière $\sum a_n.z^n$ *avec* $a_n = \sin(\dfrac{1}{2^n})$

exercice 5

Solutions

résolution 1 • On commence par rappeler que $\boxed{\lim a_n = e}$

En effet: On sait que pour $n > 0$ *on a* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n.\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ *et que* $\ln(1+h) \underset{0}{\sim} h$*, on en déduit que*

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et ainsi

$$n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$$

On a ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$

Comme la fonction exp *est continue sur* $\mathbb{R}$*, et donc en particulier en* 1*, on peut en déduire que*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp(1) = e$$

- A partir de là, on peut soit utiliser la règle de D'Alembert, soit revenir à la définition pour conclure.

  Utilisons ici la définition!

  On s'intéresse à la suite $(|a_n|.r^n)$ avec $r \geqslant 0$ fixé.
  D'après ce qui précède, on a (lorsque $r > 0$)

$$|a_n|.r^n \underset{+\infty}{\sim} e.r^n$$

  Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|.r^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 1 \\ e & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r < 1 \end{cases}$$

  On en déduit que

$$\{r \geqslant 0 |\ \text{la suite } (|a_n|.r^n) \text{ est majorée}\} = [0,1]$$

  D'où

$$\boxed{R = \sup([0,1]) = 1}$$

- remarque:
  si vous êtes plus à l'aise avec la règle de D'Alembert, utilisez la !

résolution 2

- On commence par remarquer que

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4^n}$$

- A partir de là, on peut soit utiliser la règle de D'Alembert, soit revenir à la définition pour conclure.

  Utilisons ici la définition!

  On s'intéresse à la suite $(|a_n|.r^n)$ avec $r \geqslant 0$ fixé.
  D'après ce qui précède, on a (lorsque $r > 0$)

$$|a_n|.r^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4^n}.r^n = n^2.\left(\frac{r}{4}\right)^n$$

  Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|.r^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 4 \\ +\infty & \text{si } r = 4 \\ 0 & \text{si } r < 4 \end{cases}$$

  (En effet, dans ce dernier cas, on a $\lim n^2 = +\infty$ *et* $\lim \left(\frac{r}{4}\right)^n = 0$*, mais le théorème des croissances comparées nous permet d'affirmer que* $\lim n^2.\left(\frac{r}{4}\right)^n = 0$*)*
  On en déduit que

$$\{r \geqslant 0 |\ \text{la suite } (|a_n|.r^n) \text{ est majorée}\} = [0{,}4[$$

  D'où

$$\boxed{R = \sup([0{,}4[) = 4}$$

- remarque:
  si vous êtes plus à l'aise avec la règle de D'Alembert, utilisez la !

résolution 3 • Nous allons montrer que le rayon de cette série entière vaut un à l'aide de la définition.
On s'intéresse pour cela à la suite $(|a_n|.r^n) = \left(\cos(n\pi/3).\dfrac{r^n}{\sqrt{n}}\right)$ avec $r \geqslant 0$

i) pour $r \in [0,1]$ on a $\lim |a_n|.r^n = 0$ car $(\cos(n\pi/3))$ est une suite bornée et $(\dfrac{r^n}{\sqrt{n}})$ est une suite qui tend vers 0.
Comme la suite $(|a_n|.r^n)$ est une suite convergente, on peut affirmer qu'elle est bornée.

ii) pour $r > 1$, nous allons montrer rigoureusement que la suite $(v_n) = (|a_n|.r^n)$ n'est pas majorée.
Soit $r > 1$.
- la suite $(\dfrac{r^n}{\sqrt{n}})$ tend vers $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées.
- notons $u_n = \cos(n\pi/3)$.
La suite (u_n) ne possède pas de limite mais la suite extraite (u_{6n}) possède une limite puisque c'est la suite constante égale à un.
- la suite extraite $(v_{6n}) = (|a_{6n}|.r^{6n})$ tend ainsi vers $+\infty$ en tant que produit de la suite constante un et d'une suite de limite infinie.
- comme $\lim v_{6n} = 0$, on peut affirmer que la suite $(v_n) = (|a_n|.r^n)$ n'est pas majorée

iii) On en déduit que

$$\{r \geqslant 0 | \text{ la suite } (|a_n|.r^n) \text{ est majorée}\} = [0,1[\text{ ou } [0,1]$$

D'où $\boxed{R = 1}$

- remarque:
si vous êtes plus à l'aise avec la règle de D'Alembert,...et bien tant pis pour vous! Ici on ne pouvait l'utiliser car le quotient ne possède pas de limite...

résolution 4

- Pour $z \neq 0$, on pose

$$u_n = |a_n.z^n| = \left|\sin \frac{1}{2^n}\right|.|z|^n$$

- Comme $\lim \dfrac{1}{2^n} = 0$ on a $\sin \dfrac{1}{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^n}$ et donc

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{|z|^n}{2^n}$$

- Comme $u_n > 0$, nous allons utiliser la régle de D'Alembert à la série numérique $\sum u_n$.
  On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\dfrac{|z|^{n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{|z|^n}{2^n}} = \frac{|z|}{2}$$

  Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{2}$$

  On peut en déduire ainsi que
  - pour $|z| < 2$ la série $\sum a_n.z_n$ est ACV
  - pour $|z| > 2$ la série $\sum a_n.z_n$ est GDV

  On en déduit donc que $\boxed{R = 2}$

$\boxed{\textbf{résolution 5}}$