Plan tangent

exercice 1

On considère la nappe paramétrée $(\mathbb{R}^2,f)$ *avec*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v) = (uv, u+v, uv^2) \end{array}$$

Ecrire l'équation cartésienne du plan tangent au point $M(0,1)$

exercice 2

On considère la nappe paramétrée $(\mathbb{R}^2,f)$ *avec*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v) = (u+v, u-v, u^2-v^2) \end{array}$$

Ecrire l'équation cartésienne du plan tangent au point $M(0,1)$

exercice 3

On considère la nappe paramétrée $(\mathbb{R}^2,f)$ *avec*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v) = (u+v, u-v, u^2-v^2) \end{array}$$

Ecrire l'équation cartésienne du plan tangent au point $M(u_0,v_0)$ *avec* $(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2$

exercice 4

On considère la surface S *d'équation cartésienne* $xyz = 6$
Déterminer le plan tangent au point $M_0(1,2,3)$

exercice 5

On considère la surface S *d'équation cartésienne* $x = y^2 + z^2$
Déterminer le plan tangent au point $M_0(x_0,y_0,z_0) \in S$

exercice 6

On considère la surface S *d'équation cartésienne* $x^2 + 2yz = 0$
Déterminer le plan tangent au point $M_0(x_0,y_0,z_0) \in S$ *tel que* $(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$

exercice 7

On considère la surface S *d'équation cartésienne* $x^2 + 2yz + 2x = 0$
Déterminer le plan tangent au point $M_0(x_0,y_0,z_0) \in S$

exercice 8

Solutions

résolution 1 • Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

On a

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} v \\ 1 \\ v^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ 2uv \end{pmatrix}$$

donc

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(0,1) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$$

Ainsi le point $M(0,1) = (0,1,0)$ est un point régulier de la surface.

- Le plan tangent à la surface en $M(0,1)$ est le plan qui passe par le point $(0,1,0)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne est $< \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} >= 0$

c'est à dire

$$\boxed{x - z = 0}$$

résolution 2 • Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

On a

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2u \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2v \end{pmatrix}$$

donc

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(-1,2) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(-1,2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$$

Ainsi le point $M(-1,2) = (1, -3, -3)$ est un point régulier de la surface.

- Le plan tangent à la surface en $M(-1,2)$ est le plan qui passe par le point $(1,-3,-3)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

  Son équation cartésienne est $<\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \\ z+3 \end{pmatrix}>= 0$

  c'est à dire

$$\boxed{-3x + y - z + 3 = 0}$$

résolution 3 • Soit $(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2$.

On a

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2u_0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2v_0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2u_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2v_0 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} u_0 - v_0 \\ u_0 + v_0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$$

Ainsi le point $M(u_0,v_0) = (u_0 + v_0, u_0 - v_0, u_0^2 - v_0^2)$ est un point régulier de la surface.

- Le plan tangent à la surface en $M(u_0,v_0)$ est le plan qui passe par le point $(u_0 + v_0, u_0 - v_0, u_0^2 - v_0^2)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix} u_0 - v_0 \\ u_0 + v_0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

  Son équation cartésienne est

$$< \begin{pmatrix} u_0 - v_0 \\ u_0 + v_0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - u_0 - v_0 \\ y - u_0 + v_0 \\ z - u_0^2 + v_0^2 \end{pmatrix} >= 0$$

  c'est à dire après calculs

$$\boxed{(u_0 - v_0).x + (u_0 + v_0).y - z - u_0^2 + v_0^2 = 0}$$

résolution 4

- La surface a pour équation cartésienne $F(x,y,z)=0$ avec

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & xyz-6 \end{array}$$

- On a $\nabla(F) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ donc $\nabla_{M_0}(F) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$

  Le point M_0 est un point régulier

- Le plan tangent en M_0 est le plan qui passe par le point $M_0=(1,2,3)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

  Son équation est donc

$$< \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} >= 0$$

  c'est à dire

$$\boxed{6x+3y+2z-18=0}$$

résolution 5 • La surface a pour équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$ avec

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x - y^2 - z^2 \end{array}$$

- On a $\nabla(F) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix}$ donc $\nabla_{M_0}(F) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2y_0 \\ -2z_0 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$

  Le point M_0 est un point régulier.

- Le plan tangent en M_0 est le plan qui passe par le point $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -2y_0 \\ -2z_0 \end{pmatrix}$.

  Son équation est donc
  $$< \begin{pmatrix} 1 \\ -2y_0 \\ -2z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} >= 0$$
  c'est à dire
  $$x - 2y_0.y - 2z_0.z - x_0 + 2y_0^2 + 2z_0^2 = 0$$
  Comme $M_0 \in S$ on a $x_0 = y_0^2 + z_0^2$ et donc l'équation se simplifie en
  $$x - 2y_0.y - 2z_0.z + x_0 = 0$$
  ou encore
  $$\boxed{\frac{1}{2}(x + x_0) = y_0.y + z_0.z}$$

résolution 6 • La surface a pour équation cartésienne $F(x,y,z)=0$ avec

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2+2yz \end{array}$$

- On a $\nabla(F) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2z \\ 2y \end{pmatrix}$

  donc $\nabla_{M_0}(F) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2z_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$ car $(x_0,y_0,z_0) =\neq (0,0,0)$ par hypothèse.

  Le point M_0 est un point régulier.

- Le plan tangent en M_0 est le plan qui passe par le point $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

  Son équation est donc
  $$< \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} >= 0$$
  c'est à dire
  $$x_0.x + z_0.y + y_0.z - x_0^2 - 2y_0z_0 = 0$$
  Comme $M_0 \in S$ on a $x_0^2 + 2y_0z_0 = 0$ et l'équation se simplifie ainsi en
  $$\boxed{x_0.x + z_0.y + y_0.z = 0}$$

résolution 7 • La surface a pour équation cartésienne $F(x,y,z)=0$ avec

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2+2yz+2x \end{array}$$

- On a $\nabla(F)=\begin{pmatrix}2x+2\\2z\\2y\end{pmatrix}$

  donc $\nabla_{M_0}(F)=\begin{pmatrix}2x_0+2\\2z_0\\2y_0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x_0+1\\z_0\\y_0\end{pmatrix}$

  On a ainsi
  $$\nabla_{M_0}(F)=\overrightarrow{0} \Longleftrightarrow (x_0,y_0,z_0)=(-1,0,0)$$
  Or le point $(-1,0,0)\notin S$ car $1^2+2.0.0+2.(-1)=-1\neq 0$

  Ainsi tout point $M_0\in S$ est un point régulier.

- Le plan tangent en M_0 est le plan qui passe par le point $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ et de vecteur normal $\begin{pmatrix}x_0+1\\z_0\\y_0\end{pmatrix}$

  Son équation est donc
  $$<\begin{pmatrix}x_0+1\\z_0\\y_0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}>=0$$
  c'est à dire
  $$(x_0+1).x+z_0.y+y_0.z-(x_0^2+2y_0z_0+x_0)=0$$
  Comme $M_0\in S$ on a $x_0^2+2y_0z_0+2x_0=0$ et l'équation se simplifie ainsi en
  $$\boxed{(x_0+1).x+z_0.y+y_0.z+x_0=0}$$
  ce que l'on peut encore écrire
  $$\boxed{x_0.x+z_0.y+y_0.z+x+x_0=0}$$

$\boxed{\textbf{résolution 8}}$