

## Nature d'une série numérique (2A)

### exercice 1

Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{\cos n}{n \cdot \sqrt{n}}$

### exercice 2

Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{n^{20}}{2^n}$

### exercice 3

Déterminer la nature de la série  $\sum \ln \frac{2n(n+4)(n+5)}{(3n^2-1)(n+8)}$

### exercice 4

Déterminer la nature de la série  $\sum \ln \frac{n(n+4)}{(n+2)(n+3)}$

### exercice 5

Déterminer la nature de la série  $\sum \ln \frac{n(n+5)}{(n+2)(n+3)}$

### exercice 6

Déterminer la nature de  $\sum (-1)^n \cdot n^{10} \cdot e^{-\sqrt{n}}$

### exercice 7

Déterminer la nature de la série  $\sum (-1)^n \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

### exercice 8

Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{\sqrt{n}}{n \cdot (\sqrt{n} - 1)}$

### exercice 9

Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n \cdot (\sqrt{n} - 1)}$   
(on pourra effectuer un DL à un ordre suffisant)

### exercice 10

Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}}$   
(on pourra effectuer un DL à un ordre suffisant)

### exercice 11

Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{1}{n^{\ln n}}$

**exercice 12**

Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{\sqrt{n+4}}{n!}$

**exercice 13**

Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+4}}{n!}$

**exercice 14**

Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{\cos(n)}{n!}$

**exercice 15 (\*\*)**

Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{\sqrt{n+1} \cdot \cos(n)}{n!}$

**exercice 16 (\*)**

Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n \cdot n + 5}{n^3 + 2n^2 + 4}$

**exercice 17**

|

**exercice 18**

|

**exercice 19**

|

**exercice 20**

|

---

**Solutions****résolution 1**

- Pour tout  $n \geq 1$  on note  $u_n = \frac{\cos n}{n \cdot \sqrt{n}}$

(on note de suite que  $u_n$  n'est pas de signe stable)

- Soit  $n \geq 1$ .

On a

$$0 \leq |u_n| = \frac{|\cos n|}{n^{1.5}} \leq \frac{1}{n^{1.5}} = v_n$$

La série  $\sum v_n$  est une série de Riemann de référence convergente.

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet de conclure que  $\sum |u_n|$  est une série convergente.

On a montré que  $\sum u_n$  est une série absolument convergente, ce qui implique qu'elle est convergente.

**résolution 2**

- Pour tout  $n \geq 0$  notons  $u_n = \frac{n^{20}}{2^n}$

On note que le terme général  $u_n$  est strictement positif.

- On remarque par exemple que  $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . En effet:

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^{22}}{2^n} \longrightarrow 0 \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées}$$

- On a  $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et l'on sait que  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann de référence absolument convergente: on peut alors en déduire, d'après un théorème de comparaison, que  $\sum u_n$  est une série absolument convergente, ce qui implique que  $\boxed{\sum u_n \text{ est une série convergente}}$
- Il était également possible d'utiliser ici la règle de D'Alembert.

En effet, pour tout  $n \geq 1$ , on a  $u_n > 0$  et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{20}}{2 \cdot n^{20}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{20} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Ce qui permet bien d'affirmer que  $\sum u_n$  est une série convergente.

---

**résolution 3** • Pour tout  $n \geq 1$  on note  $u_n = \ln \frac{2n(n+4)(n+5)}{(3n^2-1)(n+8)}$

- On remarque que

$$\frac{2n(n+4)(n+5)}{(3n^2-1)(n+8)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n^3}{3n^3} = \frac{2}{3}$$

On vient de prouver que

$$\lim \frac{2n(n+4)(n+5)}{(3n^2-1)(n+8)} = \frac{2}{3}$$

- Le théorème de composition des limites permet de dire que:  $\lim u_n = \ln \frac{2}{3} \neq 0$
- Ceci prouve que la série  $\sum u_n$  est une série grossièrement divergente, ce qui implique qu'elle soit divergente

**résolution 4**

• Pour tout  $n \geq 1$  on note  $u_n = \ln \frac{n(n+4)}{(n+2)(n+3)}$

• Soit  $n \geq 1$ .

En divisant chaque facteur par  $n$ , on obtient l'écriture

$$u_n = \ln \frac{\left(1 + \frac{4}{n}\right)}{\left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \ln \left(1 + \frac{4}{n}\right) - \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) - \ln \left(1 + \frac{3}{n}\right)$$

Il est alors tentant d'effectuer un développement limité pour obtenir un équivalent

$$\begin{aligned} u_n &= \left[ \frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - \left[ \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] - \left[ \frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n} = v_n \end{aligned}$$

• On a

i)  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

ii)  $v_n$  de signe stable car négatif pour tout  $n \geq 1$

iii)  $\sum v_n$  est une série de Riemann de référence divergente

La règle des équivalents permet d'en déduire que  $\sum u_n$  est une série divergente.

**résolution 5**

• Pour tout  $n \geq 1$  on note  $u_n = \ln \frac{n(n+5)}{(n+2)(n+3)}$

• Soit  $n \geq 1$ .

En divisant chaque facteur par  $n$ , on obtient l'écriture

$$u_n = \ln \frac{\left(1 + \frac{5}{n}\right)}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \ln \left(1 + \frac{5}{n}\right) - \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) - \ln \left(1 + \frac{3}{n}\right)$$

Il est alors tentant d'effectuer un développement limité pour obtenir un équivalent

$$\begin{aligned} u_n &= \left[ \frac{5}{n} - \frac{5^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - \left[ \frac{2}{n} - \frac{2^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - \left[ \frac{3}{n} - \frac{3^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= -\frac{6}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{6}{n^2} = v_n \end{aligned}$$

• On a

i)  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

ii)  $v_n$  de signe stable car négatif pour tout  $n \geq 1$

iii)  $\sum v_n$  est une série de Riemann de référence convergente

La règle des équivalents permet d'en déduire que  $\sum u_n$  est une série convergente.

**résolution 6**

- Pour tout  $n \geq 0$  on note  $u_n = (-1)^n \cdot n^{10} \cdot e^{-\sqrt{n}}$

(on note de suite que  $u_n$  n'est pas de signe stable)

- On remarque par exemple que  $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . En effet:

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = (-1)^n \cdot n^{12} \cdot e^{-\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

car:

- $((-1)^n)$  est une suite bornée
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{12} \cdot e^{-\sqrt{n}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} (X^2)^{12} e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X^{24} e^{-X} = 0$  (on a posé  $X = \sqrt{n}$ )  
(c'est le théorème des croissances comparées qui nous donne cette limite)

- On a  $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et l'on sait que  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann de référence absolument convergente: on peut alors en déduire, d'après un théorème de comparaison, que  $\sum u_n$  est une série absolument convergente, ce qui implique que  $\boxed{\sum u_n \text{ est une série convergente}}$

**résolution 7** • On a  $u_n = (-1)^n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$  pour tout  $n \geq 1$

- Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et que l'on sait que  $\sin x \underset{0}{\sim} x$  et  $\operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x$ , on peut dire que  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^2}$
- On a  $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$  et  $\frac{1}{n^2}$  qui est de signe stable, on peut donc affirmer par la règle des équivalents que les séries  $\sum |u_n|$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$  sont de même nature.  
Or  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann notoirement convergente, donc on en déduit que  $\sum |u_n|$  est une série convergente.

La série  $\sum u_n$  est ACV donc CV

---

**résolution 8** • Pour tout  $n \geq 2$ , on note  $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n \cdot (\sqrt{n} - 1)}$

• On remarque directement que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot n} = \frac{1}{n}$$

• On a

- i)  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$
- ii)  $\frac{1}{n}$  est toujours positif
- iii)  $\sum \frac{1}{n}$  est une série de Riemann de référence divergente

La règle des équivalents permet d'en déduire que  $\sum u_n$  est une série divergente.

**résolution 9** • Pour tout  $n \geq 2$  on note  $u_n = \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n \cdot (\sqrt{n} - 1)}$

- Soit  $n \geq 2$ , on a

$$\frac{\sqrt{n}}{n \cdot (\sqrt{n} - 1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Ainsi 
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

- On sait que:

- la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{n}$  est convergente ( ce n'est pas de référence mais si classique! exemple 40 du poly)
- la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$  est ACV
- la série de terme général  $o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$  est ACV

- Ainsi, on peut affirmer que

la série  $\sum u_n$  est une série convergente

car somme de 3 séries convergente

**résolution 10**

• Pour tout  $n \geq 0$  on note  $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}}$

- Comme indiqué, on effectue un développement limité.  
Pour  $n \geq 0$  on a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \left[ 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + o\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \right] \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{=x_n} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{=y_n} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{=z_n} \end{aligned}$$

- Regardons chaque terme maintenant!

- $\sum x_n$  est une série convergente (exemple 40 du cours...)
- $\sum y_n$  est une série de Riemann convergente
- $\sum z_n$  est une série absolument convergente d'après le théorème 14

On peut affirmer que  $\boxed{\sum u_n \text{ est une série convergente}}$ , comme somme de 3 séries convergentes!

- **remarque:**

on peut aussi en alternative, plutôt que de considérer séparément les séries de terme général  $y_n$  et  $z_n$ , considérer la série de terme général  $y_n + z_n$ .

Ce qui donne

– On a  $y_n + z_n = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

Comme  $\frac{1}{n^2}$  est toujours positif et que la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente, on peut affirmer d'après la règle des équivalents que la série de terme général  $y_n + z_n$  converge.

- On conclut cette fois en disant que  $\boxed{\sum u_n \text{ est une série convergente}}$ , comme somme de deux séries convergentes ( $\sum x_n$  et  $\sum y_n + z_n$ )

**résolution 11** • On note  $u_n = \frac{1}{n^{\ln n}}$  pour tout  $n \geq 1$

On remarque de suite(ah!ah!) que  $u_n$  est toujours positif

- Soit  $n \geq 3$ .

Comme la fonction  $\ln$  est croissante sur son ensemble de définition on a

$$\ln n \geq \ln 3$$

et donc

$$n^{\ln n} \geq n^{\ln 3}$$

Comme la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ , on a

$$\frac{1}{n^{\ln n}} \leq \frac{1}{n^{\ln 3}}$$

On vient de prouver que

$$\forall n \geq 3, 0 \leq \frac{1}{n^{\ln n}} \leq \frac{1}{n^{\ln 3}}$$

- La série de terme général  $\frac{1}{n^{\ln 3}}$  est une série de Riemann convergente car  $\ln 3 > 1$ .  
Le théorème de comparaison des séries à termes positifs nous permet de conclure que

$$\sum u_n \text{ est une série convergente}$$

---

**résolution 12** • On a pour tout  $n$  entier  $u_n = \frac{\sqrt{n+4}}{n!}$ .

Comme  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ , on peut utiliser la règle de D'Alembert.

• Soit  $n \geq 1$ , on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+4}} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+4}} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

On en déduit que la série  $\sum u_n$  est convergente

**résolution 13** • On a pour tout  $n$  entier  $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n+4}}{n!}$ .

On pose pour tout  $n$  entier  $v_n = |u_n| = \frac{\sqrt{n+4}}{n!}$

Comme  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$ , on peut utiliser la règle de D'Alembert.

- Soit  $n \geq 1$ , on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+4}} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+4}} \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

On en déduit que la série  $\sum v_n$  est convergente

- On vient de prouver que  $\sum u_n$  est une série absolument convergente

---

**résolution 14** • On note pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n = \frac{\cos(n)}{n!}$

- On remarque que pour tout  $n \geq 0$  on a  $0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n!}$ .

Comme la série  $\sum \frac{1}{n!}$  est une série de référence convergente,  
on peut affirmer d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs que

$\sum u_n$  est une série absolument convergente, donc convergente

**résolution 15** • Nous allons établir que  $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  ce qui suffit pour justifier que  $\sum u_n$  est une série ACV donc CV.

• Pour  $n \geq 3$  on a

$$n^2 \cdot u_n = \frac{\sqrt{n+1} \cdot n^2}{n \cdot (n-1)(n-2)} \cdot \frac{1}{(n-3)!} \cdot \cos(n) = \frac{n \cdot \sqrt{n+1}}{(n-1)(n-2)} \cdot \frac{1}{(n-3)!} \cdot \cos n$$

avec clairement

- $\lim \frac{n \cdot \sqrt{n+1}}{(n-1)(n-2)} = \lim \frac{n^{3/2}}{n^2} = 0$
- $\lim \frac{1}{(n-3)!} = 0$
- $(\cos n)$  est une suite bornée

On a ainsi bien justifié que  $\lim \frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = 0$ , c'est à dire que  $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

**résolution 16**

- On note pour tout  $n$  entier  $u_n = \frac{(-1)^n \cdot n + 5}{n^3 + 2n^2 + 4}$

- On a

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^3} = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

cependant on ne peut conclure ici avec la règle des équivalents car le signe n'est pas stable!

- On a

$$|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Comme  $\frac{1}{n^2}$  est positif pour tout  $n \geq 1$

et que la série de terme générale  $\frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente,

on peut affirmer grâce à la règles des équivalents que la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

- Conclusion:

$\sum u_n$  est une série absolument convergente, donc convergente

---

**résolution 17**

---

**résolution 18**

---

**résolution 19**

---

**résolution 20**