Continuité

exercice 1

On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \end{array}$

1. *Montrer que* f *est continue en* $(0,0)$ *par rapport à chacune de ses variables*
2. f *est-elle continue en* $(0,0)$*?*

exercice 2

On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases} \end{array}$

1. *Etudier la continuité de* f *en* $(0,0)$ *par rapport à chacune de ses variables*
2. f *est-elle continue en* $(0,0)$*?*

exercice 3

On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

1. *Etudier la continuité de* f *en* $(0,0)$ *par rapport à chacune de ses variables*
2. f *est-elle continue en* $(0,0)$*?*

exercice 4

On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4-2x^2y+3y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

1. *Etudier la continuité de* f *en* $(0,0)$ *par rapport à chacune de ses variables.*
2. *Pour tout* $m \in \mathbb{R}^*$ *fixé, déterminer* $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx)$
3. *Montrer que* f *n'est pas continue en* $(0,0)$*!*

exercice 5 (**)

On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2+xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$

1. *Montrer que* f *est continue en* $(0,0)$
2. *Montrer que* f *est continue en tout point* $(x_0,y_0) \neq (0,0)$

Solutions

$\boxed{\textbf{résolution 1}}$ 1. • On a $x \mapsto f(x{,}0) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x{,}0) = 0 = f(0{,}0$: $\boxed{f \text{ est continue par rapport à } x \text{ en } (0{,}0)}$

• On remarque déjà que $f(0{,}y) = \begin{cases} \dfrac{0}{y} = 0 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi $y \mapsto f(0{,}y) = 0$

Donc $\lim\limits_{y\to 0} f(0{,}y) = 0 = f(0{,}0$: $\boxed{f \text{ est continue par rapport à } y \text{ en } (0{,}0)}$

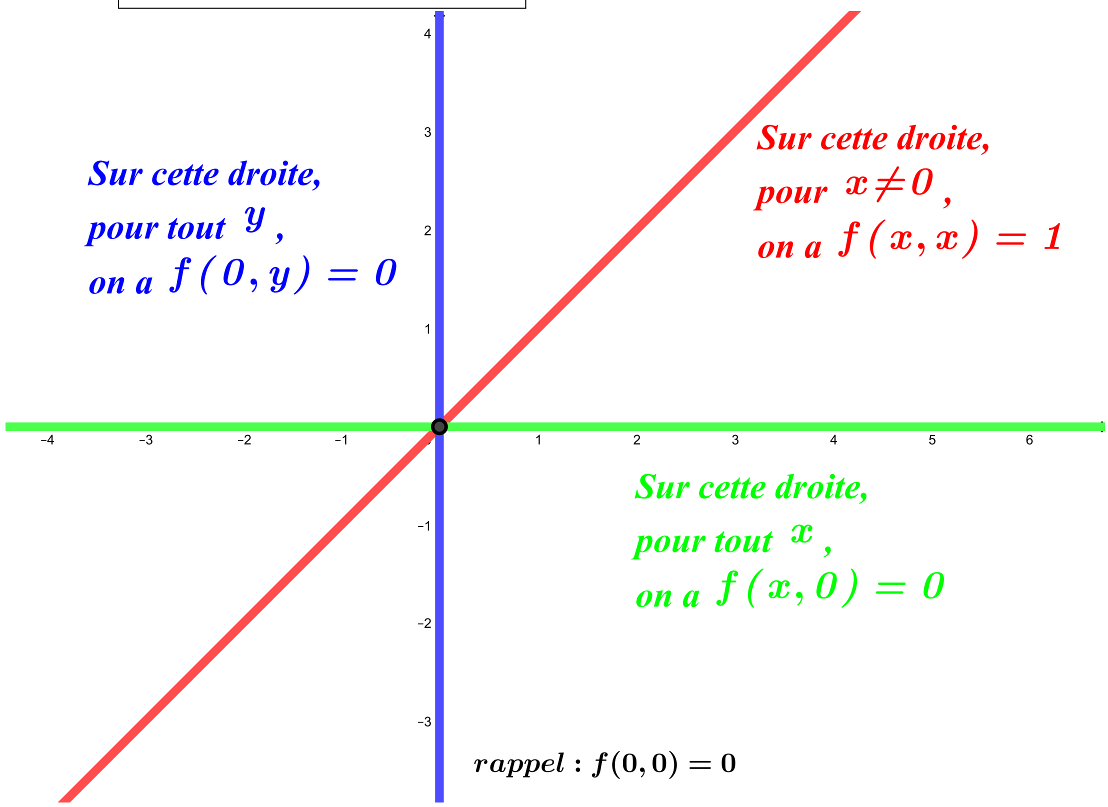
2. On a

$$\lim_{x\to 0}(x{,}x) = (0{,}0)$$

Mais

$$\lim_{x\to 0} f(x{,}x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \neq f(0{,}0)$$

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas continue en } (0{,}0)}$



résolution 2

- On remarque déjà que $f(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2-0^2}{x^2+0^2} = 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

  Ainsi $x \mapsto f(x,0) = 1$

  Donc $\boxed{f \text{ est continue par rapport à } x \text{ en } (0,0)}$

- On remarque déjà que $f(0,y) = \begin{cases} \dfrac{0^2-y^2}{0^2+y^2} = -1 & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

  Ainsi $y \mapsto f(0,y) = \begin{cases} -1 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

  Donc $\boxed{f \text{ n'est pas continue par rapport à } y \text{ en } (0,0)}$

Comme f n'est pas continue par rapport à x en (0,0),
on peut affirmer que $\boxed{f \text{ n'est pas continue en } (0,0)}$

1. $\boxed{\textbf{résolution 3}}$ 1. • On remarque déjà que $f(x,0) = \begin{cases} \dfrac{0.x.(x^2-0^2)}{x^4+0^4} = 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi $x \mapsto f(x,0) = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = 0 = f(0,0)$: $\boxed{f \text{ est continue par rapport à } y \text{ en } (0,0)}$

• On remarque déjà que $f(0,y) = \begin{cases} \dfrac{0.y.(0^2-y^2)}{0^4+y^4} = 0 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi $y \mapsto f(0,y) = 0$

Donc $\lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = 0 = f(0,0)$: $\boxed{f \text{ est continue par rapport à } y \text{ en } (0,0)}$

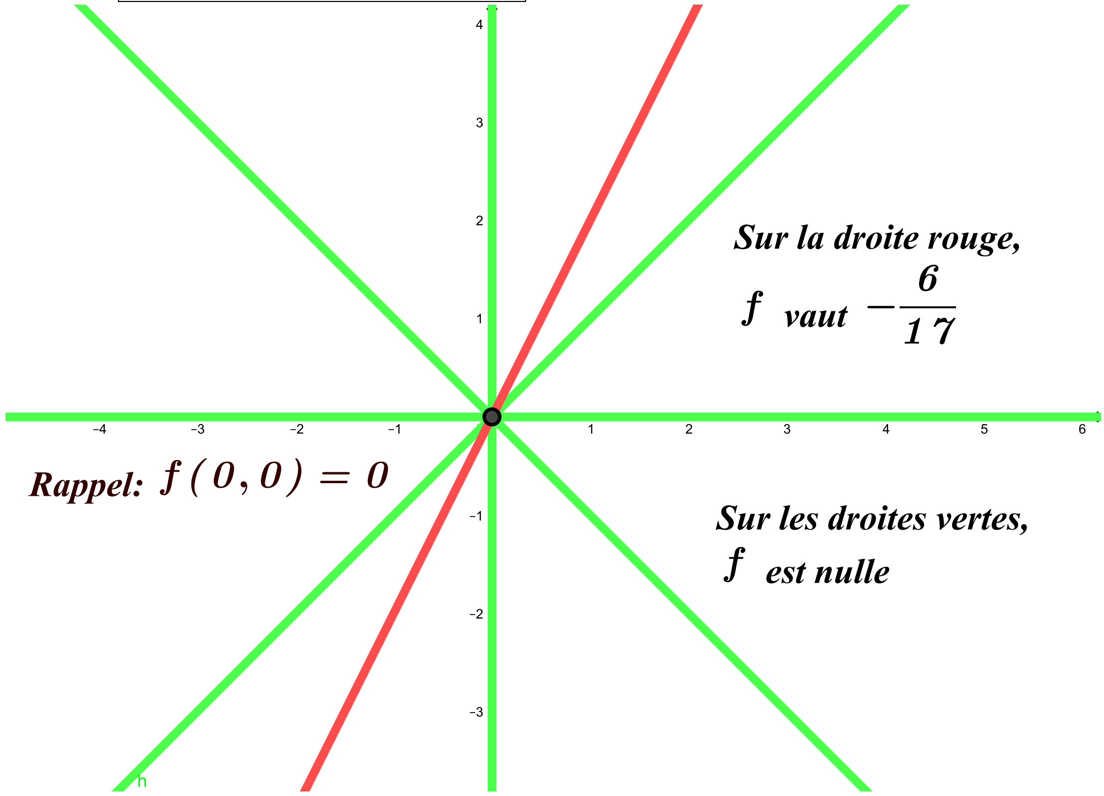
2. On a

$$\lim_{x \to 0}(x,2x) = (0,0)$$

Mais

$$\lim_{x \to 0} f(x,2x) = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2(x^2-4x^2)}{x^4+2^4x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{-6}{17} = \frac{-6}{17} \neq f(0,0)$$

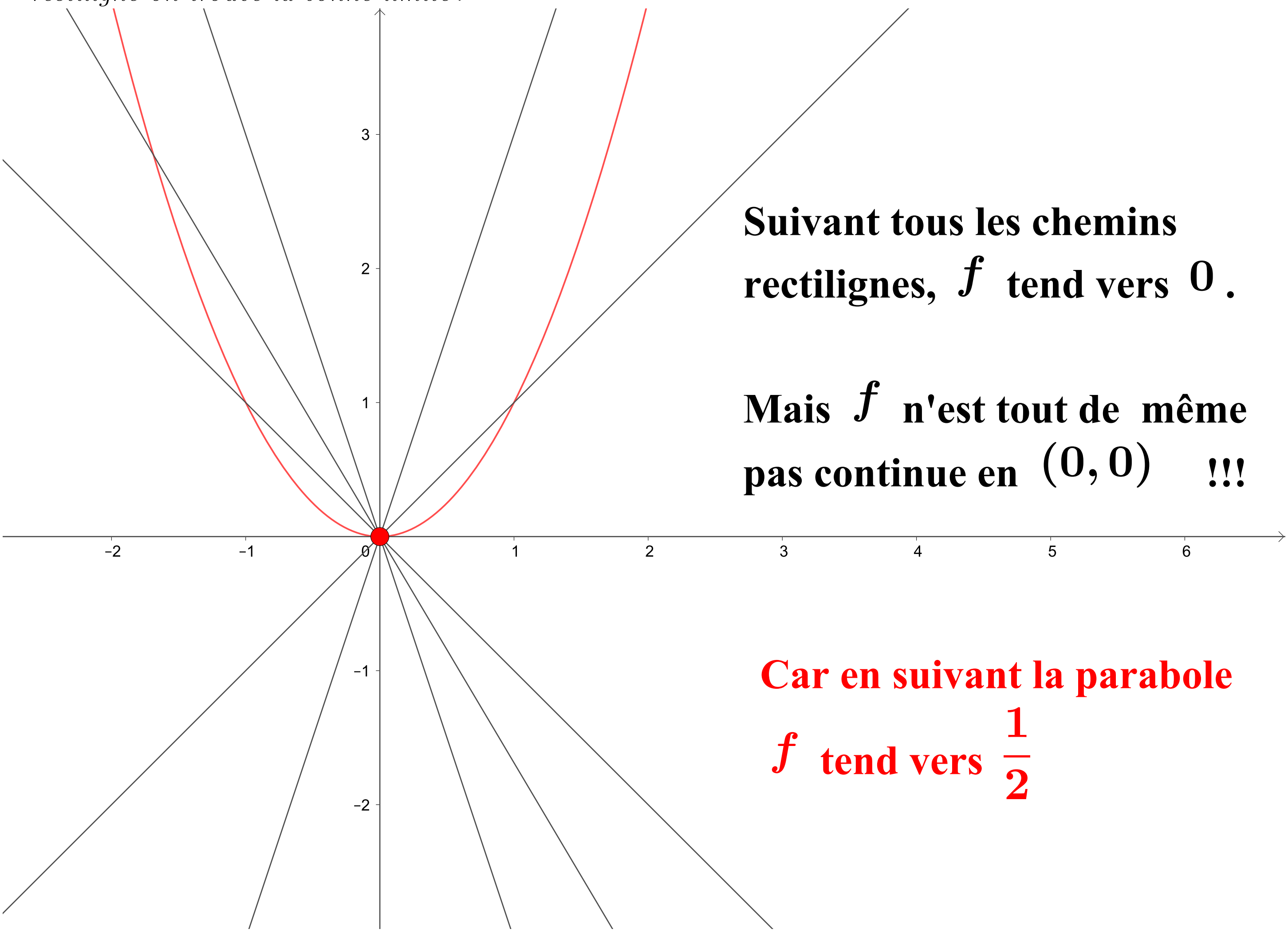
Donc $\boxed{f \text{ n'est pas continue en } (0,0)}$



résolution 4 • cf. exemples précédents

- Soit $m \in \mathbb{R}^*$ fixé.
  On a pour $x \neq 0$
  $$f(x,mx) = \frac{m.x^3}{x^4 - 2mx^2y + 3m^2x^2} = \frac{mx}{x^2 - 2mx + 3m^2}$$
  Ainsi
  $$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2 - 2mx + 3m^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{3m^2} = 0$$
- On a
  $$\lim_{x\to 0}(x,x^2) = (0,0)$$
  mais
  $$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$
  Ainsi f n'est pas continue en $(0,0)$.

  remarque: Il est étonnant de constater que f n'est pas continue en $(0,0)$ alors que par tout chemin rectiligne on trouve la bonne limite !



résolution 5 1. • Pour prouver la continuité en (0,0) on va poser $\begin{cases} x & = r.\cos t \\ y & = t.\sin t \end{cases}$

- Soit $(x,y) \neq (0,0)$
  On a
$$f(x,y) = f(r.\cos t, r.\sin t) = \frac{r^2.\cos^2 t.\sin t}{r^2 + r^2 \sin t.\cos t} = \frac{r.\cos t.\sin t}{1 + \dfrac{1}{2}\sin(2t)}$$
  Ainsi
$$|f(x,y)| = \frac{|r.\cos t.\sin t|}{|1 + \dfrac{1}{2}\sin(2t)|} \leqslant \frac{|r|}{\dfrac{1}{2}} = 2|r|$$
- Lorsque $(x,y) \to (0,0)$ on a $r \to 0$, et donc par encadrement on a $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$

  On a bien prouvé que f est continue en (0,0) car $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

2. Soit $(x_0,y_0) \neq (0,0)$
   En ce point et au voisinage de ce point, on a $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2 + xy} = \dfrac{x^2 y}{(x + y/2)^2 + 3y^2/4}$.
   f est donc continue au voisinage de (x_0,y_0), comme quotient de fonctions continues, le dènominateur ne s'annulant pas.