

Recherche d'extremum

exercice 1 (*)

$$\begin{array}{l} \text{Etudier les extrema locaux et globaux de } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 + y^2 + xy - 3 \end{array}$$

exercice 2 (*)

$$\begin{array}{l} \text{Etudier les extrema locaux et globaux de } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 + y^2 + 6xy - 3 \end{array}$$

exercice 3 (**)

$$\begin{array}{l} \text{Etudier les extrema locaux et globaux de } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 + y^2 + 2xy - 3 \end{array}$$

exercice 4 (**)

$$\begin{array}{l} \text{Etudier les extrema locaux et globaux de } f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto y \cdot (x^2 + (\ln y)^2) \end{array}$$

exercice 5 (*)

$$\begin{array}{l} \text{Etudier les extrema locaux et globaux de } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2 \end{array}$$

exercice 6 (**)

$$\begin{array}{l} \text{Etudier les extrema locaux et globaux de } f : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x - y + x^3 - y^3 \end{array}$$

exercice 7

$$\begin{array}{l} \text{On note } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\} \\ \text{Etudier les extrema locaux et globaux de } f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x - y + x^3 - y^3 \end{array}$$

exercice 8 (*)

$$\begin{array}{l} \text{On note } D \text{ la boule ouverte de centre } (0,0) \text{ et de rayon } 1 \\ \text{Etudier les extrema locaux et globaux de } f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 + y^3 \end{array}$$

exercice 9 (**)

$$\begin{array}{l} \text{On note } D \text{ la boule fermée de centre } (0,0) \text{ et de rayon } 1 \\ \text{Etudier les extrema locaux et globaux de } f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 + 4y \end{array}$$

exercice 10 (***)

$$\begin{array}{l} \text{On note } D \text{ la boule fermée de centre } (0,0) \text{ et de rayon } 1 \\ \text{Etudier les extrema locaux et globaux de } f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 + y \end{array}$$

exercice 11

|

exercice 12

|

Solutions

résolution 1

- $D = \mathbb{R}^2$ est un ouvert et f est de classe C^∞ sur D ,

on sait alors par théorème que si f présente un extremum en a alors a est un point critique

- **Détermination des points critiques**

On résout le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ -3x = 0 \end{cases}$$

On trouve un seul point critique $(0,0)$

- Le calcul donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

- **Etude du point $(0,0)$**

– La matrice hessienne de f en $(0,0)$ est $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

– On a

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^2 - 1^2 = (X-3)(X-1)$$

Les valeurs propres de H sont strictement positives (1 et 3)
donc f présente en $(0,0)$ un minimum local

– On remarque que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(x,y) = \underbrace{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}}_{\geq 0} - 3 \geq -3 = f(0,0)$$

donc $-3 = f(0,0)$ est un minimum global.

résolution 2

- $D = \mathbb{R}^2$ est un ouvert et f est de classe C^∞ sur D ,

on sait alors par théorème que si f présente un extremum en a alors a est un point critique

- **Détermination des points critiques**

On résout le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3y \\ y = 0 \end{cases}$$

On trouve un seul point critique $(0,0)$

- Le calcul donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

- **Etude du point $(0,0)$**

– La matrice hessienne de f en $(0,0)$ est $H = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

– On a

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X - 2 & -6 \\ -6 & X - 2 \end{vmatrix} = (X - 2)^2 - 6^2 = (X - 2 - 6)(X - 2 + 6)$$

Les valeurs propres de H sont non nulles et de signes opposés (8 et -4)
donc f ne présente pas d'extremum en $(0,0)$

résolution 3

- $D = \mathbb{R}^2$ est un ouvert et f est de classe C^∞ sur D ,

on sait alors par théorème que si f présente un extremum en a alors a est un point critique

- **Détermination des points critiques**

On résout le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \iff x + y = 0$$

On trouve qu'il y a une infinité de points critiques: tous les points du type $(x_0, -x_0)$

- Le calcul donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

- **Etude du point $(x_0, -x_0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé**

- La matrice hessienne de f en $(x_0, -x_0)$ est $H = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
- Comme la matrice n'est pas inversible, il va falloir conclure en étant imagiatif!
- On remarque que $f(x_0, -x_0) = -3$
et que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy - 3 = (x+y)^2 - 3 \geq -3 = f(x_0, -x_0)$$

On en conclut que f possède comme minimum global -3 , et que celui-ci est atteint en tout point du type $(x_0, -x_0)$

résolution 4

- $D = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ est un ouvert et f est de classe C^∞ sur D ,

on sait alors par théorème que si f présente un extremum en a alors a est un point critique

- **Détermination des points critiques**

On résout le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + (\ln y)^2 + 2 \ln y = 0 \end{cases}$$

Pour la première équation la seule possibilité est $x = 0$ (car $y > 0$), d'où

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ (\ln y)^2 + 2 \ln y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ (\ln y) \cdot (\ln y + 2) = 0 \end{cases}$$

On trouve deux points critiques $(0,1)$ et $(0,e^{-2})$

- Le calcul donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{y} + 2 \frac{\ln y}{y}$$

- **Etude du point $(0,1)$**

- La matrice hessienne de f en $(0,1)$ est $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- Les valeurs propres de H sont strictement positives (2 est valeur propre double) donc f **présente en $(0,1)$ un minimum local**
- On remarque que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ on a

$$f(x,y) = y \cdot (x^2 + (\ln y)^2) \geq 0 = f(0,1)$$

donc $0 = f(0,1)$ est un **minimum global**.

- **Etude du point $(0,e^{-2})$**

- La matrice hessienne de f en $(0,e^{-2})$ est $H = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^2 \end{pmatrix}$
- Les valeurs propres de H sont non nulles et de signes opposés donc f **ne présente pas d'extremum en $(0,e^{-2})$**

résolution 5

- $D = \mathbb{R}^2$ est un ouvert et f est de classe C^∞ sur D ,

on sait alors par théorème que si f présente un extremum en a alors a est un point critique

- **Détermination des points critiques**

On résout le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x^2 + 6y = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ y = x \end{cases}$$

On trouve deux points critiques $(0,0)$ et $(-1, -1)$

- Le calcul donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6$$

- **Etude du point $(0,0)$**

- La matrice hessienne de f en $(0,0)$ est $H = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$
- Cette matrice est symétrique réelle donc semblable à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
- On a $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(D) = \det(H) = -36$

Les valeurs propres sont non nulles et de signes opposées,
donc f **ne présente pas d'extremum en $(0,0)$**

- **Etude du point $(-1, -1)$**

- La matrice hessienne de f en $(-1, -1)$ est $H = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$
- On a $\det(H) = 36 > 0$ donc les valeurs propres sont non nulles et de même signe
- On a $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(H) = -18 < 0$ donc les valeurs propres sont strictement négatives.
On en déduit que f **présente un maximum local en $(-1, -1)$**
- On peut remarquer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x,0) = +\infty$ donc la fonction f n'est pas majoré sur D et il n'y a donc pas de maximum global.
($f(-1, -1) = 5$ est ainsi un maximum local mais non global)

résolution 6

• D est un ensemble fermé borné et la fonction f est continue sur D , on sait par théorème que f est bornée sur D et atteint ses bornes.

• **Plan d'étude**

1. Etude sur le plus grand ouvert inclus dans D (et sur lequel f est C^1)
2. Etude sur la frontière de D
3. Conclusion

1. **Etude sur $\overset{\circ}{D}$**

(Comme $\overset{\circ}{D}$ est un ouvert, si f présente en a un extremum alors a est un point critique) **Détermination des points critiques sur $\overset{\circ}{D}$**

On résout le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + 3x^2 = 0 \\ 1 + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Il n'y a pas de point critique sur $\overset{\circ}{D}$

2. **Etude sur la frontière de D**

- Il s'agit d'étudier ce qui se passe sur le carré: pour cela nous allons étudier chaque côté. On réalise 4 TV

x	0	1
$f(x; 0)$	0	2

x	0	1
$f(x; 1)$	-2	0

y	0	1
$f(y; 0)$	0	-2

y	0	1
$f(y; 1)$	2	0

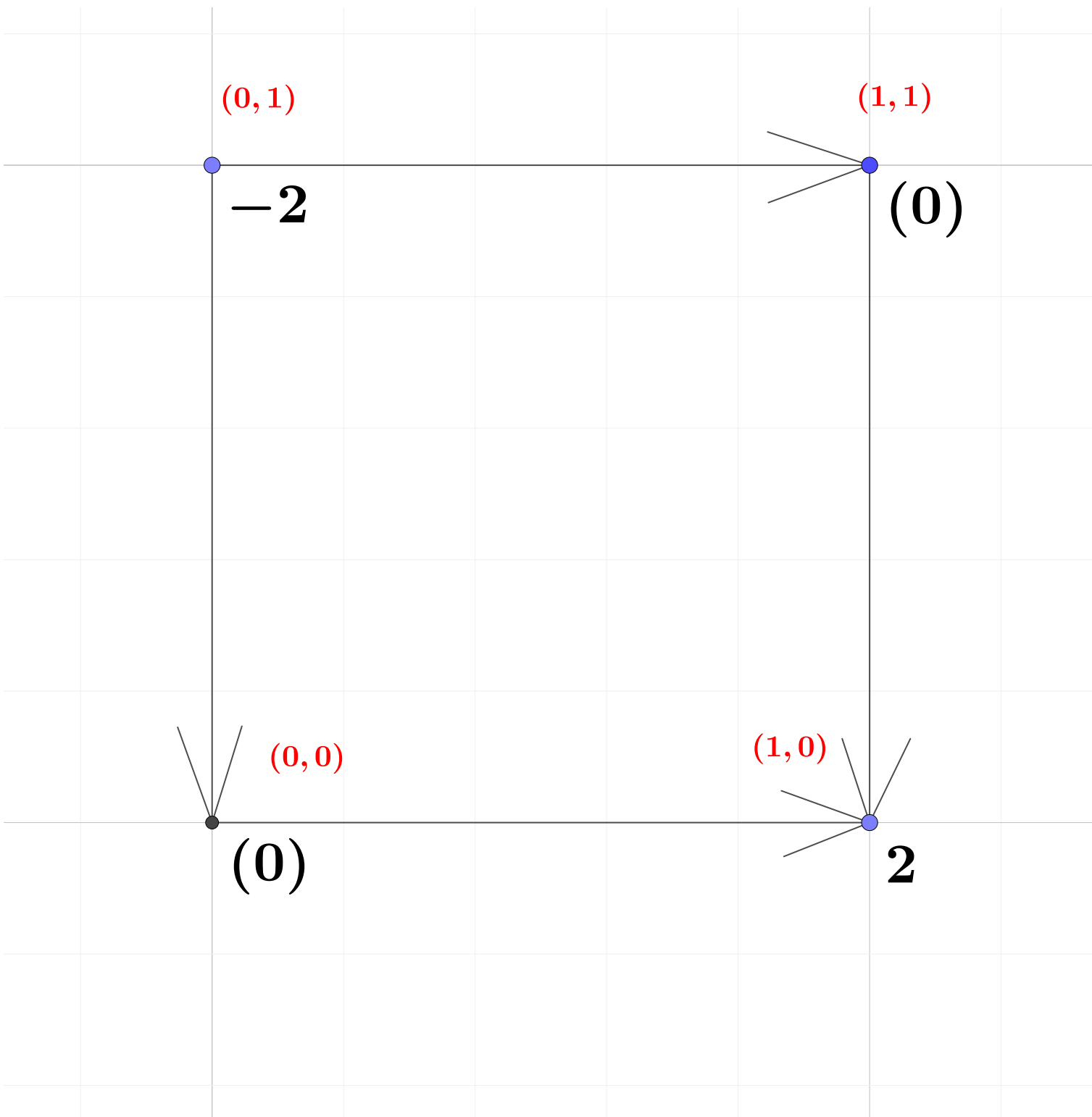
On peut résumer la situation sur un schéma. (voir plus loin)

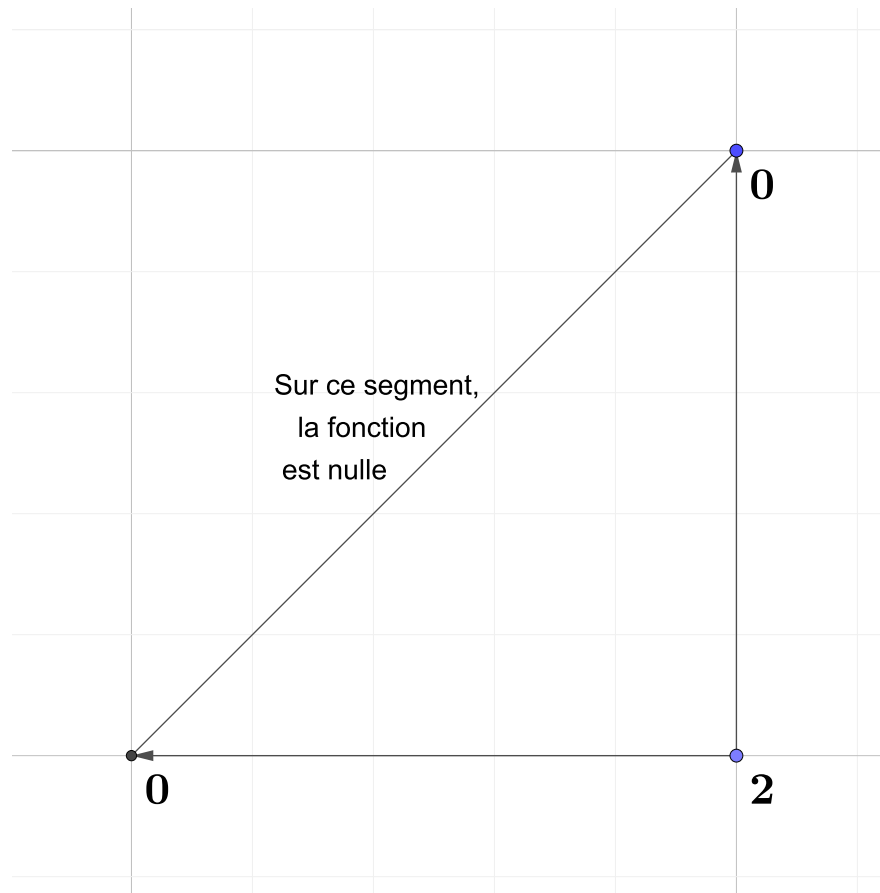
- On trouve que f possède sur la frontière de D un minimum global (-2) et un maximum global (2) et ne présente pas d'autre extremum local.

3. **Conclusion**

Comme on sait que f possède un maximum global et un minimum global sur D , et que sur $\overset{\circ}{D}$ ils ne s'y trouvent pas, on peut affirmer que

- -2 est le minimum global de f sur D , et qu'il est atteint en $(0,1)$
- 2 est le maximum global de f sur D , et qu'il est atteint en $(1,0)$
- f ne possède pas d'autre extremum





résolution 7 EN TRAVAUX

résolution 8

• $D = B_O((0,0),1)$ est un ouvert et f est de classe C^∞ sur D ,
on sait alors par théorème que si f présente un extremum en a alors a est un point critique

• **Détermination des points critiques**

On résout le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

On trouve un seul point critique $(0,0)$

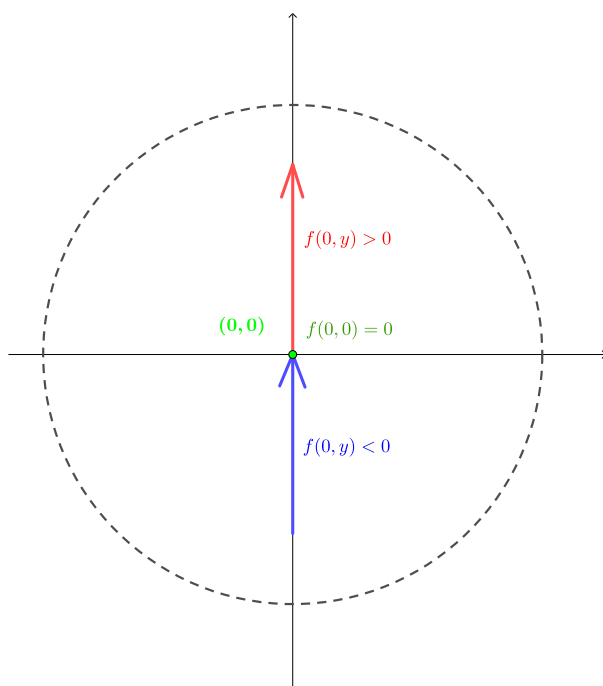
• Le calcul donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

• **Etude du point $(0,0)$**

- La matrice hessienne de f en $(0,0)$ est $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Comme la matrice n'est pas inversible, il va falloir conclure en étant imaginatif!
- On remarque que
 - $\forall y > 0, f(0,y) = y > 0 = f(0,0)$
 - $\forall y < 0, f(0,y) = y < 0 = f(0,0)$

donc f ne présente pas d'extremum en $(0,0)$.



résolution 9 • D est un ensemble fermé borné et la fonction f est continue sur D , on sait par théorème que f est bornée sur D et atteint ses bornes.

• **Plan d'étude**

1. Etude sur le plus grand ouvert inclus dans D (et sur lequel f est C^1)
2. Etude sur la frontière de D
3. Conclusion

1. **Etude sur $\overset{\circ}{D}$**

Comme $\overset{\circ}{D}$ est un ouvert, si f présente un extremum en a alors a est un point critique.
Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4$, il n'y a aucun point critique sur $\overset{\circ}{D}$, donc aucun extremum sur $\overset{\circ}{D}$

2. **Etude sur la frontière de D**

- La frontière a pour paramétrisation $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto (\cos t, \sin t)$
- On pose $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 4 \sin t$
 - On a $\forall t \in [-\pi, \pi], g'(t) = -2 \cos t \sin t + 4 \cos t = 2 \cos t \underbrace{(2 - \sin t)}_{>0}$

On obtient le TV ci-dessous

t	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$+\pi$			
$g'(t)$		–	0	+	0	–	
$g(t)$	1		–4		4		1

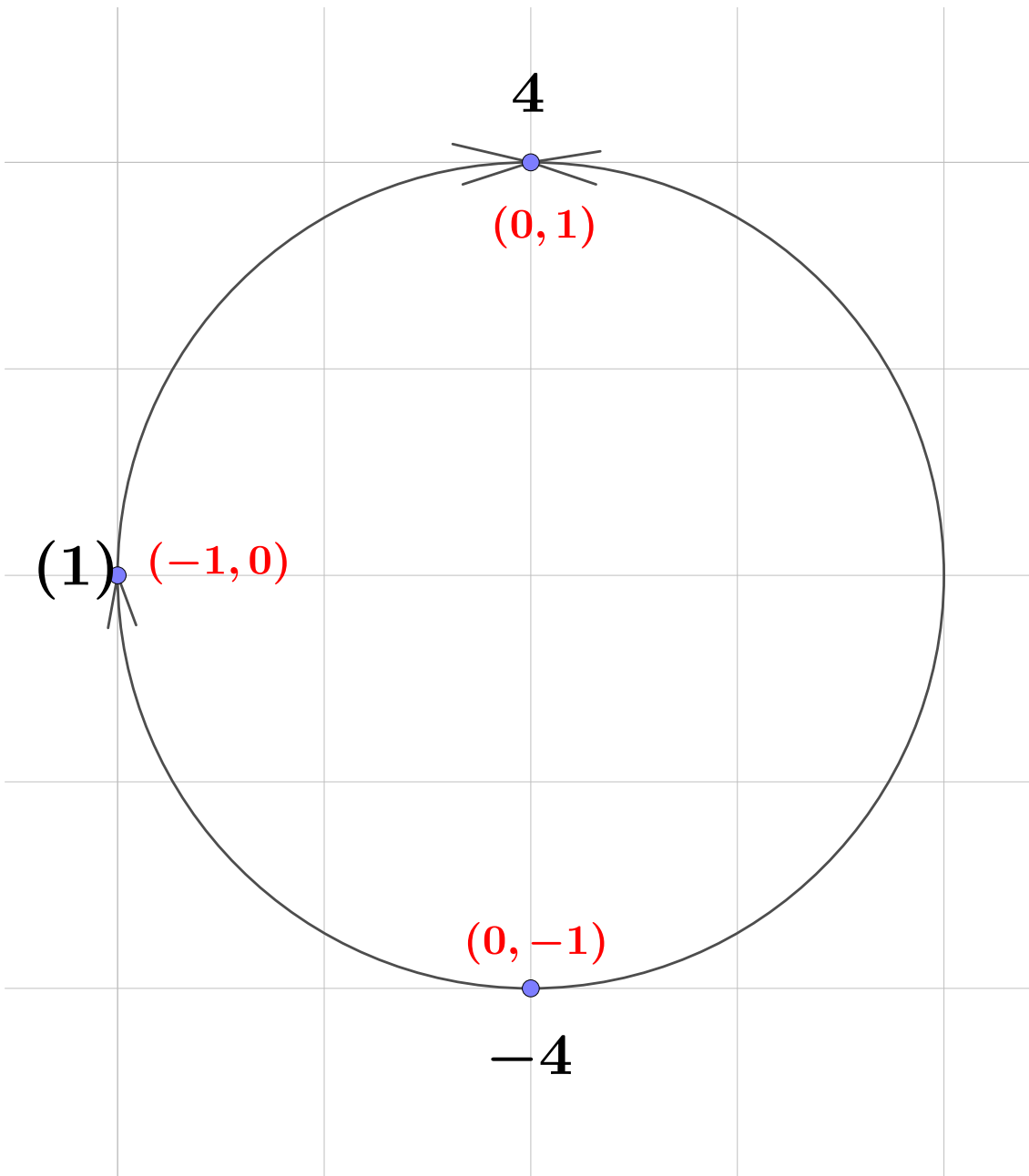
On peut résumer la situation sur un schéma (voir plus loin)

- On trouve que g possède un minimum global (-4) et un maximum global (4) et ne présente pas d'autre extremum local.

• **Conclusion**

Comme on sait que f possède un maximum global et un minimum global sur D , et que sur $\overset{\circ}{D}$ ils ne s'y trouvent pas, on peut affirmer que

- -4 est le minimum global de f sur D , et qu'il est atteint en $(0, -1)$
- 4 est le maximum global de f sur D , et qu'il est atteint en $(0, 1)$
- f ne possède pas d'autre extremum



résolution 10

• D est un ensemble fermé borné et la fonction f est continue sur D , on sait par théorème que f est bornée sur D et atteint ses bornes.

• **Plan d'étude**

1. Etude sur le plus grand ouvert inclus dans D (et sur lequel f est C^1)
2. Etude sur la frontière de D
3. Conclusion

1. **Etude sur $\overset{\circ}{D}$**

Comme $\overset{\circ}{D}$ est un ouvert, si f présente un extremum en a alors a est un point critique.

Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$, il n'y a aucun point critique sur $\overset{\circ}{D}$, donc aucun extremum sur $\overset{\circ}{D}$

2. **Etude sur la frontière de D**

- La frontière a pour paramétrisation $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto (\cos t, \sin t)$
- On pose $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin t$
 - On a $\forall t \in [-\pi, \pi], g'(t) = -2 \cdot \cos t \cdot \sin t + \cos t = \cos t \cdot (1 - 2 \sin t)$
 - On obtient le TV ci-dessous

t	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	
$g'(t)$		–	0	+	0	–
$g(t)$	1	\searrow	–1	\nearrow	$\frac{5}{4}$	\searrow
					1	\nearrow
						$\frac{5}{4}$

On peut résumer la situation sur un schéma (voir plus loin)

- On trouve que g possède un minimum global (-1) et un maximum global ($\frac{5}{4}$) et présente un minimum local en $\frac{\pi}{2}$

– **Etude du point** $(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}) = (0, 1)$

- On a $\forall \theta \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[, f(\cos \theta, \sin \theta) > f(0, 1)$

ce qui s'écrit encore $\forall x \in]0, \frac{\sqrt{3}}{2}[, f(x, \sqrt{1-x^2}) > f(0, 1)$

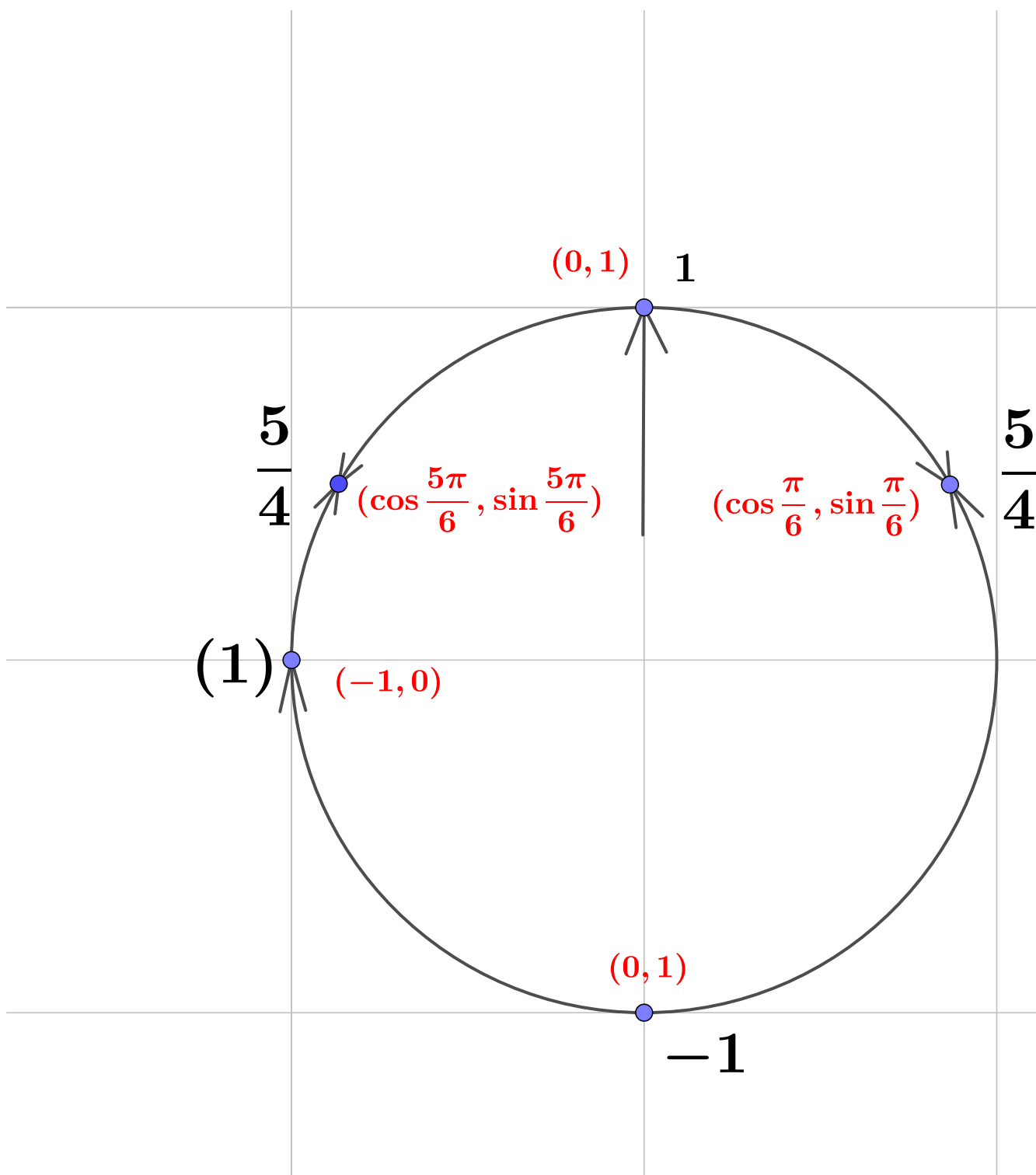
On remarque que $\forall y \in [0, 1[, f(0, y) = 4y < 4 = f(0, 1)$

On en déduit qu'en $(0, 1)$ f ne présente pas d'extremum.

- Conclusion**

Comme on sait que f possède un maximum global et un minimum global sur D , et que sur $\overset{\circ}{D}$ ils ne s'y trouvent pas, on peut affirmer que

- -1 est le minimum global de f sur D , et qu'il est atteint en $(0, -1)$
- $\frac{5}{4}$ est le maximum global de f sur D , et qu'il est atteint en $(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
et $(\cos \frac{5\pi}{6}, \sin \frac{5\pi}{6}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
- f ne possède pas d'autre extremum



résolution 11

résolution 12