

# Equations aux dérivées partielles

## exercice 1

Déterminer les fonctions  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  qui vérifient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy \quad (E)$$

## exercice 2

Déterminer les fonctions  $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  qui vérifient

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2xy \quad (E)$$

## exercice 3

Déterminer les fonctions  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  qui vérifient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cdot f(x, y) \quad (E)$$

## exercice 4

Déterminer les fonctions  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  qui vérifient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x^2 + 1) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \cdot f(x, y) = (x^2 + 1)^{3/2} \quad (E)$$

## exercice 5

Déterminer les fonctions  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  qui vérifient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0 \quad (E)$$

## exercice 6

Déterminer les fonctions  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  qui vérifient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + f(x, y) = 0 \quad (E)$$

## exercice 7

Déterminer les fonction  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  qui vérifient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2 \cdot f(x, y) = 2x - 3 + y \quad (E)$$

**exercice 8**

Déterminer les fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  qui vérifient le système

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 2y \end{cases}$$

**exercice 9**

Déterminer les fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  qui vérifient le système

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xy + 2y \end{cases}$$

**exercice 10**

Déterminer les fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^3$  qui vérifient le système

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz + y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz + x \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy + 2z \end{cases}$$

**exercice 11**

## Solutions

### résolution 1

- Nous allons procéder par analyse-synthèse.

- Partie Analyse.

- On suppose que  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}^2$

A  $x \in \mathbb{R}$  fixé, on note 

$$\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto f(x, y) \end{array}$$

On a alors  $\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  et ainsi  $\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = 2xy$

- Par une simple quadrature (=primitivation), on trouve qu'il existe une constante, qui a priori dépend de  $x$ , que nous noterons  $A(x) \in \mathbb{R}$  telle que

$$\forall y \in \mathbb{R}, g(y) = xy^2 + A(x)$$

- On a donc

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = xy^2 + A(x) \quad \text{où } A(x) \text{ est une constante réelle}$$

- **Montrons que  $A : x \mapsto A(x)$  est de classe  $C^1$**

Pour  $y = 0$ , on remarque que  $A : x \mapsto f(x, 0)$

et ceci prouve que  $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  car  $x \mapsto (x, 0) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  et  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  par hypothèse.

- **Conclusion: à l'issue de la partie synthèse, on a montré que**

Si  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  est solution de  $(E)$  alors nécessairement  $f : (x, y, z) \mapsto xy^2 + A(x)$  avec  $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- Partie Synthèse

Soit 

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto xy^2 + A(x) \end{array}$$
 avec  $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Il est clair que  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et vérifie  $(E)$

- Conclusion

La solution générale est 

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto xy^2 + A(x) \end{array}$$
 avec  $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

**résolution 2**

- Nous allons procéder par analyse-synthèse.

- **Partie Analyse.**

- On suppose que  $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}^3$

A  $(x, z) \in \mathbb{R}^2$  fixé, on note

$$\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto f(x, y, z) \end{array}$$

On a alors  $\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$  et ainsi  $\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = 2xy$

- Par une simple quadrature (=primitivation), on trouve qu'il existe une constante, qui a priori dépend de  $x$  et  $z$ , que nous noterons  $A(x, z) \in \mathbb{R}$  telle que

$$\forall y \in \mathbb{R}, g(y) = xy^2 + A(x, z)$$

- On a donc

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = xy^2 + A(x, z) \quad \text{où } A(x, z) \text{ est une constante réelle}$$

- **Montrons que**  $A : (x, z) \mapsto A(x, z)$  **est de classe**  $C^1$

Pour  $y = 0$ , on remarque que  $A : (x, z) \mapsto f(x, 0, z)$

et ceci prouve que  $A \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  car  $(x, z) \mapsto (x, 0, z) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  et  $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  par hypothèse.

- **Conclusion: à l'issue de la partie synthèse, on a montré que**

Si  $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  est solution de  $(E)$  alors nécessairement  $f : (x, y, z) \mapsto xy^2 + A(x, z)$  avec  $A \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

- **Partie Synthèse**

Soit

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longmapsto xy^2 + A(x, z) \end{array} \quad \text{avec } A \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

Il est clair que  $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  et vérifie  $(E)$

- **Conclusion**

La solution générale est

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \longmapsto xy^2 + A(y, z) \end{array} \quad \text{avec } A \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

**résolution 3**

- Nous allons procéder par analyse-synthèse.

- **Partie Analyse.**

- On suppose que  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}^2$

A  $y \in \mathbb{R}$  fixé, on note

$$\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x, y) \end{array}$$

On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et ainsi  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = y.g(x)$

La fonction  $g$  vérifie ainsi l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\theta'(x) - y.\theta(x) = 0$$

- La solution générale de cette équation différentielle est  $\begin{array}{l} \theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto A.e^{xy} \end{array}$  avec  $A \in \mathbb{R}$

- On a en déduit donc qu'il existe une constante  $A(y) \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A(y).e^{xy}$   
On a donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = A(y).e^{xy}$$

- **Montrons que  $A : y \mapsto A(y)$  est de classe  $C^1$**

Pour  $x = 0$ , on remarque que  $A : y \mapsto f(0, y)$

et ceci prouve que  $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  car  $y \mapsto (0, y) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  et  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  par hypothèse.

- **Conclusion: à l'issue de la partie synthèse, on a montré que**

Si  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  est solution de  $(E)$  alors nécessairement  $f : (x, y) \mapsto A(y).e^{xy}$  avec  $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- **Partie Synthèse**

Soit  $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto A(y).e^{xy} \end{array}$  avec  $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Il est clair que  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et vérifie  $(E)$

- **Conclusion**

La solution générale est  $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto A(y).e^{xy} \end{array}$  avec  $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

**résolution 4**

- Nous allons procéder par analyse-synthèse

- **Partie Analyse**

- On suppose que  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}^2$

A  $y \in \mathbb{R}$  fixé, on note

$$\boxed{\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x, y) \end{array}}$$

On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)g'(x) - x.g(x) = (x^2 + 1)^{3/2}$

- On a vu que la solution générale sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$(x^2 + 1)\theta'(x) - x.\theta(x) = (x^2 + 1)^{3/2}$$

est

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x.\sqrt{1 + x^2} + A.(x^2 + 1)^{3/2} \end{array}} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

- On en déduit donc ici qu'il existe une constante  $A(y) \in \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x.\sqrt{1 + x^2} + A(y).(x^2 + 1)^{3/2}$$

- On a donc

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x.\sqrt{1 + x^2} + A(y).(x^2 + 1)^{3/2} \text{ où } A(y) \text{ est une constante réelle.}}$$

- **Montrons que  $A : y \mapsto A(y)$  est de classe  $C^1$**

Pour  $x = 0$ , on remarque que  $A : y \mapsto f(0, y)$

et ceci prouve que  $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  car  $y \mapsto (0, y) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  par hypothèse.

- **Conclusion: à l'issue de la partie Synthèse, on a montré que**

si  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  vérifie (E) alors nécessairement  $f : (x, y) \mapsto x.\sqrt{1 + x^2} + A(y).(x^2 + 1)^{3/2}$  avec  $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- **Partie Synthèse**

Soit

$$\boxed{\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x.\sqrt{1 + x^2} + A(y).(x^2 + 1)^{3/2} \end{array}} \quad \text{avec } A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Il est clair que  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et vérifie (E)

- **Conclusion**

La solution générale est

$$\boxed{\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x.\sqrt{1 + x^2} + A(y).(x^2 + 1)^{3/2} \end{array}} \quad \text{avec } A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

**résolution 5**

- On va faire un raisonnement simplifié.

- Soit  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .

Pour  $y \in \mathbb{R}$  fixé, on note  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x, y)$

On a alors pour tout  $x$  réel

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$$

On en déduit les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = A(y) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A(y).x + B(y) \end{aligned}$$

Conclusion: la solution générale est  $\boxed{\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto A(y)x + B(y) \end{array}}$  avec  $(A, B) \in [C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})]^2$

**résolution 6**

- On va faire un raisonnement simplifié.

- Soit  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .

Pour  $y \in \mathbb{R}$  fixé, on note  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x, y)$

On a alors pour tout  $x$  réel

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + f(x, y) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + g(x) = 0$$

*La solution générale de l'équation différentielle  $\theta''(x) + \theta(x) = 0$*

*est  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$*

$$x \mapsto A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$$

On en déduit ainsi qu'il existe deux constantes réelles  $A(y)$  et  $B(y)$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A(y) \cdot \cos x + B(y) \cdot \sin x$ .

Conclusion:

la solution générale est  $\boxed{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto A(y) \cdot \cos x + B(y) \cdot \sin x}$  avec  $(A, B) \in [C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})]^2$

**résolution 7**

- Nous allons procéder par analyse-synthèse

- **Partie Analyse**

- On suppose que  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}^2$ .

A  $y \in \mathbb{R}$  fixé, on note

$$\boxed{\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x, y) \end{array}}$$

On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $g''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$

Ainsi on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) - 3.g'(x) + 2.g(x) = 2x - 3 + y$$

La fonction  $g$  vérifie donc une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

$$\theta''(x) - 3\theta'(x) + 2\theta(x) = 2x - 3 + y$$

- Avec la méthode standard, on résout l'équation ci-dessus e
  - la solution générale sur  $\mathbb{R}$  de l'équation homogène est  $\theta : x \mapsto A.e^x + B.e^{2x}$  avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
  - une solution particulière de l'équation complète est  $\theta_0 : x \mapsto x + y/2$
  - par théorème, la solution générale de l'équation complète est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière,

càd ici  $\boxed{\begin{array}{l} \theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto A.e^x + B.e^{2x} + x + y/2 \end{array}} \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$

- On en déduit donc qu'il existe deux constantes  $A(y) \in \mathbb{R}$  et  $B(y) \in \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A(y).e^x + B(y).e^{2x} + x + y/2$$

- On a donc

$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = A(y).e^x + B(y).e^{2x} + x + y/2$  où  $A(y)$  et  $B(y)$  sont deux constantes réelles

- **Montons que  $A : y \mapsto A(y)$  et  $B : y \mapsto B(y)$  sont de classe  $C^2$ .**

On remarque que  $\forall y \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(0, y) = A(y) + B(y) + y/2 \\ f(1, y) = e.A(y) + e^2.B(y) + 1 + y/2 \end{cases}$

On en déduit que

$$A : y \mapsto \frac{1}{e - e^2} (f(1, y) - e^2.f(0, y) - 1 - y.(1 - e^2)/2)$$

Cette expression prouve que  $A \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  car  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On montre de même que  $B \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

- **Conclusion: à l'issue de la partie synthèse, on a montré que**

Si  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  vérifie (E) alors nécessairement

$$f : (x, y) \mapsto A(y).e^x + B(y).e^{2x} + x + y/2 \text{ avec } (A, B) \in [C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})]^2$$

- Partie Synthèse

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x,y) \mapsto A(y).e^x + B(y).e^{2x} + x + y/2$  avec  $(A,B) \in [C^2(\mathbb{R} \cdot \mathbb{R})]^2$

Il est clair que  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et vérifie  $(E)$

- Conclusion

La solution générale est  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x,y) \mapsto A(y).e^x + B(y).e^{2x} + x + y/2$  avec  $(A,B) \in [C^2(\mathbb{R} \cdot \mathbb{R})]^2$

**résolution 8**

deuxième

- La méthode consiste à résoudre la première équation puis à remplacer dans la

- On a déjà l'équivalence

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^2 \iff \exists K \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^2 + xy^2 + K(y)$$

- En reportant dans le système cela donne

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2xy + 2y \end{cases} \\ \iff \exists K \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & \begin{cases} f(x,y) &= x^2 + xy^2 + K(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2xy + 2y \end{cases} \\ \iff \exists K \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & \begin{cases} f(x,y) &= x^2 + xy^2 + K(y) \\ 2xy + K'(y) &= 2xy + 2y \end{cases} \\ \iff \exists K \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & \begin{cases} f(x,y) &= x^2 + xy^2 + K(y) \\ K'(y) &= 2y \end{cases} \\ \iff \exists K \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists A \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & \begin{cases} f(x,y) &= x^2 + xy^2 + K(y) \\ K(y) &= y + A \end{cases} \end{aligned}$$

- Conclusion: les fonctions cherchées sont

$$\boxed{\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2 + xy^2 + y^2 + A \end{array}} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

**résolution 9**

deuxième

- La méthode consiste à résoudre la première équation puis à remplacer dans la

- On a déjà l'équivalence

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^2 \iff \exists K \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^2 + xy^2 + K(y)$$

- En reportant dans le système cela donne

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xy + 2y \end{cases}$$

$$\iff \exists K \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x,y) = x^2 + xy^2 + K(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xy + 2y \end{cases}$$

$$\iff \exists K \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x,y) = x^2 + xy^2 + K(y) \\ 2xy + K'(y) = 3xy + 2y \end{cases}$$

$$\iff \exists K \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x,y) = x^2 + xy^2 + K(y) \\ K'(y) = xy + 2y \end{cases}$$

Or il n'existe pas de fonctions  $K$  vérifiant  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, K'(y) = xy + 2y!$

(En effet, on devrait avoir  $K'(1) = 1.1 + 2.1 = 3$  mais aussi  $K'(1) = 3.1 + 2.1 = 5$ )

- Conclusion: il n'existe pas de fonction vérifiant le système proposé

**résolution 10**

• La méthode consiste à résoudre la première équation puis à remplacer dans la deuxième et la résoudre, puis ...

- On a déjà l'équivalence

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz+y \iff \exists K \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = xyz+xy+K(y,z)$$

- En reportant dans le système cela donne

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz+y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz+x \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy+2z \end{cases}$$

$$\iff \exists K \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x,y,z) = xyz+xy+K(y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz+x \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy+2z \end{cases}$$

$$\iff \exists K \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x,y,z) = xyz+xy+K(y,z) \\ xz+x + \frac{\partial K}{\partial y}(y,z) = xz+x \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy+2z \end{cases}$$

$$\iff \exists K \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x,y,z) = xyz+xy+K(y,z) \\ \frac{\partial K}{\partial y}(y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy+2z \end{cases}$$

$$\iff \exists K \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \exists L \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x,y,z) = xyz+xy+K(y,z) \\ K(y,z) = L(z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy+2z \end{cases}$$

$$\iff \exists K \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \exists L \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x,y,z) = xyz+xy+K(y,z) \\ K(y,z) = L(z) \\ xy+L'(z) = xy+2z \end{cases}$$

$$\iff \exists K \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \exists L \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x,y,z) = xyz+xy+K(y,z) \\ K(y,z) = L(z) \\ L'(z) = 2z \end{cases}$$

$$\iff \exists K \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \exists L \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists A \in \mathbb{R}, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x,y,z) = xyz+xy+K(y,z) \\ K(y,z) = L(z) \\ L(z) = z^2+A \end{cases}$$

- Conclusion: les fonctions cherchées sont

$$\boxed{f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) \longmapsto xyz+xy+z^2+A} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

---

**résolution 11**