éléments propres

exercice 1 (*)

Déterminer le polynôme caractéristique puis les sep de l'endomorphisme:

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-3x+2y+2z, 4x-y-2z, -8x+4y+5z) \end{array}$$

exercice 2 (**)

Déterminer le polynôme caractéristique puis les sep de l'endomorphisme:

$$f: \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} \end{array}$$

exercice 3 (**)

Déterminer le polynôme caractéristique puis les sep de l'endomorphisme:

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ aX^2+bX+c & \longmapsto & (a+b+c)X^2+bX+c \end{array}$$

exercice 4 (*)

Déterminer le polynôme caractéristique puis les sep de l'endomorphisme:

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-14x+5y+9z, 2x-y-z, -28x+10y+18z) \end{array}$$

exercice 5 (**)

Déterminer le polynôme caractéristique puis les sep de l'endomorphisme:

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(1)X+P(4) \end{array}$$

exercice 6 (**)

Déterminer le polynôme caractéristique puis les sep de l'endomorphisme:

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ P(X) & \longmapsto & (X+1)P'(X) \end{array}$$

exercice 7 (**)

Déterminer le polynôme caractéristique puis les sep de l'endomorphisme:

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & (X+1)P'(X) \end{array}$$

exercice 8 (*)

Déterminer les valeurs propres et les sep de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, -2x+4y+2z, -x+y+3z) \end{array}$

exercice 9 (**)

Déterminer les valeurs propres et les sep de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & (X^2+X)P(1)+(X^2-X)P(-1) \end{array}$

exercice 10 (*)

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

exercice 11 (*)

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -25 & 25 & 4 \end{pmatrix}$

exercice 12 (*)

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -5 & 7 \\ -3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

exercice 13 (*)

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

exercice 14 (*)

Déterminer les sep de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

exercice 15 (*)

Déterminer les sep de la matrice $B = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 3 \\ 15 & -10 & 3 \\ 15 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

exercice 16 (***)

On considère les 3 fonctions

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x.e^x \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2.e^x \end{array}$$

On admet que ces 3 fonctions forment une famille libre, et on note $E = \mathrm{vect}(f, g, h)$
Déterminer le polynôme caractéristique puis les sep de l'endomorphisme

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u' \end{array}$$

exercice 17 (*)

Solutions

résolution 1 – On écrit une matrice associée à f, par exemple la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on trouve

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

– Le polynôme caractéristique est donné par le déterminant

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X+3 & -2 & -2 \\ -4 & X+1 & 2 \\ 8 & -4 & X-5 \end{vmatrix}$$

– Les transvections $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ donnent

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X+3 & -2 & -2 \\ -4 & X+1 & 2 \\ 8 & -4 & X-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+3 & -2 & 0 \\ -4 & X+1 & 1-X \\ 8 & -4 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+3 & -2 & 0 \\ 4 & X-3 & 0 \\ 8 & -4 & X-1 \end{vmatrix}$$

– Un développement par rapport à la dernière colonne donne

$$\chi_f(X) = (X-1).\begin{vmatrix} X+3 & -2 \\ 4 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)\left[(X+3)(X-3)+8\right] = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1)$$

– Les valeurs propres de f étant les racines de $\chi_f(X)$, on en déduit que $\boxed{sp(f) = \{-1,+1\}}$

– **Détermination de $E_1(f)$**
Il s'agit de résoudre l'équation $f(x,y,z) - 1.(x,y,z) = 0$,
c'est à dire le système

$$\begin{cases} -4x+2y+2z & = 0 \\ 4x-2y-2z & = 0 \\ -8x+4y+4z & = 0 \end{cases}$$

Ce système équivaut l'équation $-2x+y+z=0$, donc $\boxed{E_1(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -2x+y+z=0\}}$

– **Détermination de $E_{-1}(f)$**
Il s'agit de résoudre l'équation $f(x,y,z) - (-1).(x,y,z) = 0$,
c'est à dire le système

$$\begin{cases} -2x+2y+2z & = 0 \\ 4x-2z & = 0 \\ -8x+4y+6z & = 0 \end{cases}$$

On résout ce système, en divisant par deux chaque équation puis en effectuant des substitutions

$$\begin{cases} -2x+2y+2z & = 0 \\ 4x-2z & = 0 \\ -8x+4y+6z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z & = 0 \\ z & = 2x \\ -4x+2y+3z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+2x & = 0 \\ z & = 2x \\ -4x+2y+6x & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = -x \\ z & = 2x \\ 2y & = -2x \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{E_{-1}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2x \text{ et } y = -x\} = \{(x,-x,2x) | x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}((1,-1,2))}$

résolution 2 – Notons $\mathcal{B} = \left(M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{car} \begin{cases} f(M_1) & = M_1 \\ f(M_2) & = M_2 + M_3 \\ f(M_3) & = M_2 + M_3 \\ f(M_4) & = 2M_4 \end{cases}$$

– Le polynôme caractéristique de f est donné par le déterminant

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix}$$

en développant par rapport à la première colonne cela donne

$$\chi_f(X) = (X-1) \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ -1 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix}$$

puis en développant par rapport à la dernière colonne on obtient

$$\chi_f(X) = (X-1)(X-2) \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)\left[(X-1)^2 - 1\right] = X(X-1)(X-2)^2$$

Les valeurs propres de f étant les racines de $\chi_f(X)$, on en déduit que $\boxed{sp(f) = \{0, 1, 2\}}$

– **Détermination de $E_0(f)$**

Il s'agit de résoudre l'équation $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = 0.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

c'est à dire le système $\begin{cases} a & = 0 \\ b+c & = 0 \\ b+c & = 0 \\ 2d & = 0 \end{cases}$ qui est équivalent à $\begin{cases} a & = 0 \\ c & = -b \\ d & = 0 \end{cases}$

Ainsi $\boxed{E_0(f) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(|)a = 0, d = 0, c = -b\} = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} |b \in \mathbb{K}\} = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})}$

– **Détermination de $E_1(f)$**

Il s'agit de résoudre l'équation $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) - 1.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$

c'est à dire le système $\begin{cases} a-a & = 0 \\ b+c-b & = 0 \\ b+c-c & = 0 \\ 2d-d & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 & = 0 \\ c & = 0 \\ b & = 0 \\ d & = 0 \end{cases}$ qui est enfantin!

On trouve $\boxed{E_1(f) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(|)b = 0, c = 0, d = 0\} = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |a \in \mathbb{K}\} = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})}$

– **Détermination de** $E_2(f)$

Il s'agit de résoudre l'équation $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) - 2.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$

c'est à dire le système $\begin{cases} a - 2a & = 0 \\ b + c - 2b & = 0 \\ b + c - 2c & = 0 \\ 2d - 2d & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = 0 \\ c & = b \end{cases}$

ainsi $\boxed{E_2(f) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(|)a = 0, c = b\} = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d \end{pmatrix} |(b,d) \in \mathbb{K}^2\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})}$

résolution 3

- Dans la base $\mathcal{B} = (1,X,X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ la matrice de f est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Le polynôme caractéristique de f est donné par le déterminant

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^3$$

  car on sait que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux
- Les valeurs propres de f étant les racines de $\chi_f(X)$, on a $\boxed{sp(f) = \{1\}}$
- **Détermination de** $E_1(f)$
  Il s'agit de résoudre l'équation $f(aX^2+bX+c) - 1.(aX^2+bX+c) = 0$ qui équivaut à $(b+c)X = 0$

  (bien comprendre qu'il ne s'agit pas de déterminer les racines de cette dernière équation, mais de savoir pour quels b et c, le polynôme $(b+c)X$ est le polynôme nul.(le 'zéro' dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus désigne le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est à dire le polynôme(constant) nul))
  La condition est évidemment $c = -b$.

  D'où

$$\boxed{E_1(f) = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] | c = -b\} = \{aX^2 + b(X-1) | (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{vect}(X^2,(X-1))}$$

résolution 4 – On écrit une matrice associée à f, par exemple la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on trouve

$$A = \begin{pmatrix} -14 & 5 & 9 \\ 2 & -1 & -1 \\ -28 & 10 & 18 \end{pmatrix}$$

– Le polynôme caractéristique est donné par le déterminant

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X+14 & -5 & -9 \\ -2 & X+1 & 1 \\ 28 & -10 & X-18 \end{vmatrix}$$

– Les transvections $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ puis $C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3$ donnent

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X+14 & -5 & -9 \\ -2 & X+1 & 1 \\ -2X & 0 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-4 & -5 & -9 \\ 0 & X+1 & 1 \\ 0 & 0 & X \end{vmatrix}$$

– Le déterminant d'une matrice triangulaire étant égal au produit de ses coefficients diagonaux, on a $\boxed{\chi_f(X) = X(X-4)(X+1)}$

– Les valeurs propres de f étant les racines de $\chi_f(X)$, on a $\boxed{sp(f) = \{-1, 0, 4\}}$

– **Détermination de** $E_4(f)$
Il s'agit de résoudre l'équation $f(x,y,z) - 4(x,y,z) = 0$,
c'est à dire le système

$$\begin{cases} -18x + 5y + 9z & = 0 \\ 2x - 5y - z & = 0 \\ -28x + 10y + 14z & = 0 \end{cases}$$

Ecrivons la matrice de ce système

$$\begin{pmatrix} -18 & 5 & 9 \\ 2 & -5 & -1 \\ -28 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Les transvections $L_3 \leftarrow L_3 + 14L_2$ et $L_1 \leftarrow L_1 + 9L_2$ donnent

$$\begin{pmatrix} 0 & -40 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 0 & -60 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut au système $\begin{cases} y & = 0 \\ z & = 2x \end{cases}$

D'où

$$\boxed{E_4(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0 \text{ et } z = 2x\} = \{(x,0,2x) | x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1,0,2))}$$

– **Détermination de** $E_{-1}(f)$
Il s'agit de résoudre l'équation $f(x,y,z)-(-1)(x,y,z)=f(x,y,z)+(x,y,z)=0$,
c'est à dire le système

$$\begin{cases} -13x+5y+9z &= 0 \\ 2x-z &= 0 \\ -28x+10y+19z &= 0 \end{cases}$$

Ecrivons la matrice de ce système

$$\begin{pmatrix} -13 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \\ -28 & 10 & 19 \end{pmatrix}$$

Les transvections $L_1 \leftarrow L_1+9L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3+19L_2$ donnent

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

La dilatation $L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1$ puis la transvection $L_3 \leftarrow L_3-10L_1$ aboutissent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut au système $\begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x-z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= -x \\ z &= 2x \end{cases}$ D'où

$$\boxed{E_{-1}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | y=-x \text{ et } z=2x\}=\{(x,-x,2x)|x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{vect}((1,-1,2))}$$

– **Détermination de** $E_0(f)$
Il s'agit de résoudre l'équation $f(x,y,z)-0.(x,y,z)=f(x,y,z)=0$,

Ecrivons la matrice de ce système

$$\begin{pmatrix} -14 & 5 & 9 \\ 2 & -1 & -1 \\ -28 & 10 & 18 \end{pmatrix}$$

Les transvections $L_3 \leftarrow L_3-2L_1$ puis $L_1 \leftarrow L_1+7L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2+\frac{1}{2}L_1$ donnent

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ qui correspond au système } \begin{cases} z &= y \\ x &= y \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{E_0(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x=y=z\}=\{(x,x,x)|x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{vect}((1,1,1))}$$

résolution 5

- Notons $\mathcal{B} = (1,X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$, on a

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{cases} f(1) & = 1.X + 1 = 1.X + 1.1 \\ f(X) & = 1.X + 4 = 1.X + 1.1 \end{cases}$$

- Le polynôme caractéristique de f est égal à

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -4 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - 4 = (X-1)^2 - 2^2 = (X-3)(X+1)$$

- Les valeurs propres de f étant les racines de $\chi_f(X)$ on a $\boxed{sp(f) = \{-1, 3\}}$

- **Détermination de** $E_3(f)$
  Il s'agit de résoudre l'équation $f(P) - 3P = 0$
  Notons $P = aX + b$,
  comme $P(1) = a + b$ et $P(4) = 4a + b$ on a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} f(aX+b) - 3(aX+b) = 0 &\iff (a+b)X + (4a+b) - 3(aX+b) = 0 \\ &\iff (b-2a)X + 4a - 2b = 0 = O_{\mathbb{R}_1[X]} \end{aligned}$$

  or un polynôme est le polynôme nul ssi tous ses coefficients sont nuls d'où

$$f(aX+b) - 3(aX+b) = 0 \iff \begin{cases} b - 2a & = 0 \\ 4a - 2b & = 0 \end{cases} \iff b = 2a$$

  Ainsi

$$\boxed{E_3(f) = \{aX + b \in \mathbb{R}_1[X] | b = 2a\} = \{aX + 2a | a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(X+2)}$$

- **Détermination de** $E_{-1}(f)$
  Il s'agit de résoudre l'équation $f(P) - (-1)P = f(P) + P = 0$
  Notons $P = aX + b$,
  comme $P(1) = a + b$ et $P(4) = 4a + b$ on a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} f(aX+b) + (aX+b) = 0 &\iff (a+b)X + (4a+b) + (aX+b) = 0 \\ &\iff (2a+b)X + 4a + 2b = 0 = O_{\mathbb{R}_1[X]} \end{aligned}$$

  or un polynôme est le polynôme nul ssi tous ses coefficients sont nuls d'où

$$f(aX+b) + (aX+b) = 0 \iff \begin{cases} 2a + b & = 0 \\ 4a + 2b & = 0 \end{cases} \iff b = -2a$$

  Ainsi

$$\boxed{E_3(f) = \{aX + b \in \mathbb{R}_1[X] | b = -2a\} = \{aX - 2a | a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(X-2)}$$

résolution 6

– Notons $\mathcal{B} = (1,X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$, on a

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{cases} f(1) & = (X+1).0 = 0.X + 0.1 \\ f(X) & = (X+1).1 = 1.X + 1.1 \end{cases}$$

– Le polynôme caractéristique de f est donné par le déterminant

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} = X(X-1)$$

Les racines de $\chi_f(X)$ étant les valeurs propres de f on a $\boxed{sp(f) = \{0,1\}}$

– **Détermination de $E_1(f)$**
Il s'agit de résoudre l'équation $f(P) - 1.P = 0$
Notons $P = P(X) = aX + b$,
comme $P' = P'(X) = a$ on a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} f(aX+b) - (aX+b) = 0 &\iff a.(X+1) - (aX+b) = 0 \\ &\iff a - b = 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{E_1(f) = \{aX + b \in \mathbb{R}_1[X] | a = b\} = \{aX + a | a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(X+1)}$$

– **Détermination de $E_0(f)$**
Il s'agit de résoudre l'équation $f(P) - 0.P = 0$, càd $f(P) = 0$.
On a

$$f(aX+b) = 0 \iff a(X+1) = 0 \iff a.X + a.1 = 0$$

or un polynôme est le polynôme nul ssi tous ses coefficients sont nuls d'où On a

$$f(aX+b) = 0 \iff a = 0$$

Ainsi

$$\boxed{E_0(f) = \{aX + b \in \mathbb{R}_1[X] | a = 0\} = \{b.1 | b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(1)}$$

résolution 7

– Notons $\mathcal{B} = (1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on a

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{cases} f(1) & = (X+1).0 = 0.X + 0.1 \\ f(X) & = (X+1).1 = 1.X + 1.1 \\ f(X) & = (X+1).2X = 2.X^2 + 2.X \end{cases}$$

– Le polynôme caractéristique de f est donné par le déterminant

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -2 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = X(X-1)(X-2)$$

– Les valeurs propres de f étant les racines de $\chi_f(X)$ on en déduit que $\boxed{sp(f) = \{0,1,2\}}$

– **Détermination de** $E_1(f)$
Il s'agit de résoudre l'équation $f(P) - 1.P = 0$
Notons $P = P(X) = aX^2 + bX + c$,
comme $P' = P'(X) = 2aX + b$ on a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} f(aX^2+bX+c) - (aX^2+bX+c) = 0 &\iff (2aX+b)(X+1) - (aX^2+bX+c) = 0 \\ &\iff aX^2 + 2a)X + b - c = 0 \end{aligned}$$

or un polynôme est le polynôme nul ssi tous ses coefficients sont nuls d'où

$$f(aX^2+bX+c) - (aX^2+bX+c) = 0 \iff \begin{cases} a & = 0 \\ b - c & = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{E_1(f) = \{aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X] | a = 0 \text{ et } c = b\} = \{bX + b | b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(X+1)}$$

– **Détermination de** $E_2(f)$
Il s'agit de résoudre l'équation $f(P) - 2.P = 0$
Notons $P = P(X) = aX^2 + bX + c$,

$$\begin{aligned} f(aX^2+bX+c) - 2(aX^2+bX+c) = 0 &\iff (2aX+b)(X+1) - 2(aX^2+bX+c) = 0 \\ &\iff (2a-b)X + b - 2c = 0 \end{aligned}$$

or un polynôme est le polynôme nul ssi tous ses coefficients sont nuls d'où

$$f(aX^2+bX+c) - 2(aX^2+bX+c) = 0 \iff \begin{cases} 2a - b & = 0 \\ 2c - b & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b & = 2a \\ c & = a \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{E_2(f) = \{aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X] | b = 2a \text{ et } c = a\} = \{aX^2 + 2aX + a | a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(X^2+2X+1)}$$

Détermination de $E_0(f)$
Il s'agit de résoudre l'équation $f(P) - 0.P = f(P) = 0$
Notons $P = P(X) = aX^2 + bX + c$,
on a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} f(aX^2 + bX + c) = 0 &\iff (2aX + b)(X + 1) = 0 \\ &\iff 2aX^2 + (2a + b)X + b = 0 \end{aligned}$$

or un polynôme est le polynôme nul ssi tous ses coefficients sont nuls d'où

$$f(aX^2 + bX + c) = 0 \iff \begin{cases} 2a & = 0 \\ 2a + b & = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff a = b = 0$$

Ainsi

$$\boxed{E_0(f) = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] | a = b = 0\} = \{c.1 | c \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(1)}$$

résolution 8

- Ecrivons la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Le polynôme caractéristique est donné par le déterminant

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ 2 & X-4 & -2 \\ 1 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

Les transvections $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donnent

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ X-2 & X-4 & -2 \\ 0 & -1 & X-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ 0 & X-3 & -1 \\ 0 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne on obtient

$$\chi_f(X) = (X-2) \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-2)\left[(X-3)^2 - 1\right] = (X-2)^2(X-4)$$

- Les valeurs propres de f étant les racines de $\chi_f(X)$ on a $\boxed{sp(f) = \{2,4\}}$
- **Détermination de** $E_2(f)$
  Il s'agit de résoudre l'équation $f(x,y,z) - 2(x,y,z) = 0$,
  c'est à dire le système

$$\begin{cases} -x+y+z & = 0 \\ -2x+2y+2z & = 0 \\ -x+y+z & = 0 \end{cases} \iff -x+y+z = 0$$

  ainsi $E_2(f)$ est le plan d'équation $-x+y+z=0$

$$\boxed{E_2(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -x+y+z=0\} = \{(y+z,y,z) | (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{vect}((1,1,0),(1,0,1))}$$

- **Détermination de** $E_4(f)$
  Il s'agit de résoudre l'équation $f(x,y,z) - 4(x,y,z) = 0$,
  c'est à dire le système suivant que l'on résout par substitution

$$\begin{cases} -3x+y+z & = 0 \\ -2x+2z & = 0 \\ -x+y-z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x+y+z & = 0 \\ z & = x \\ -x+y-z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x+y & = 0 \\ z & = x \\ -2x+y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = 2x \\ z & = x \end{cases}$$

  Ainsi

$$\boxed{E_4(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 2x \text{ et } z = x\} = \{(x,2x,x) | x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}((1,2,1))}$$

résolution 9 – La matrice de f dans la base $(1,X,X^2,X^3,X^4)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– Le polynôme caractéristique est donné par le déterminant

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & X-2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne cela donne

$$\chi_f(X) = X \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{vmatrix}$$

On reconnait alors un déterminant triangulaire, d'où

$$\chi_f(X) = X.(X-2)^2X^2 = X^3.(X-2)^2$$

– Les valeurs propres étant les racines du polynôme caractéristique on a $\boxed{sp(f) = \{0,2\}}$

– Pour $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$
on a $P(1) = a + b + c + d + e$ et $P(-1) = a - b + c - d + e$ et ainsi

$$f(P) = (a+b+c+d+e)(X^2+X) + (a-b+c-d+e)(X^2-X) = 2(a+c+e)X^2 + 2(b+d)X$$

– **Détermination de** $E_2(f)$
Il s'agit de résoudre l'équation $f(P) = 2P$,
avec les notations précédentes cela donne

$$\begin{aligned} f(P) = 2P &\iff 2(a+c+e)X^2 + 2(b+d)X = 2(aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e) \\ &\iff aX^4 + bX^3 - (a+e)X^2 + bX + e = 0 \\ &\iff \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ a+e &= 0 \\ b &= 0 \\ e &= 0 \end{cases} \iff a = b = e = 0 \end{aligned}$$

car un polynôme est le polynôme nul ssi tous ses coefficients sont nuls.
Ainsi

$$\boxed{E_2(f) = \{aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{R}_4[X] | a = b = e\} = \{cX^2 + dX | (c,d) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(X^2,X)}$$

- **Détermination de** $E_0(f)$
  Il s'agit de résoudre l'équation $f(P) = 0.P = 0$,
  avec les notations précédentes cela donne

$$\begin{aligned} f(P) = 0 &\Longleftrightarrow 2(a+c+e)X^2 + 2(b+d)X = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a+c+e &= 0 \\ b+d &= 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} e &= -a-c \\ d &= -b \end{cases} \end{aligned}$$

  toujours grâce au même argument.
  Ainsi

$$\boxed{E_0(f) = \{aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{R}_4[X] | e = -a-c \text{ et } d = -b\}}$$

  ce que l'on peut encore écrire

$$E_0(f) = \{aX^4 + bX^3 + cX^2 - bX - a - c | (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$$

  soit

$$\boxed{E_0(f) = \mathrm{vect}(X^4 - 1, X^3 - X, X^2 - 1)}$$

résolution 10

- Le polynôme caractéristique est donné par le déterminant

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-7 & 3 \\ -6 & X+2 \end{vmatrix} = (X-7)(X+2)+18 = X^2-5X+4 = (X-1)(X-4)$$

- Les valeurs propres de A étant les racines de $\chi_A(X)$ on a $\boxed{sp(A) = \{1,4\}}$
- Pour chaque valeur propre λ on va résoudre l'équation $(A-\lambda.I_2)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- **Détermination de $E_1(A)$**
  Comme
  $$(A-I_2)X = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-3y \\ 6x-3y \end{pmatrix}$$
  on en déduit que $\boxed{E_1(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) | y = 2x\} = \{\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})}$
- **Détermination de $E_4(A)$**
  Comme
  $$(A-4I_2)X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-3y \\ 6x-6y \end{pmatrix}$$
  on en déduit que $\boxed{E_4(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) | y = x\} = \{\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})}$

résolution 11

– Le polynôme caractéristique est donné par le déterminant

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & -5 & 0 \\ 0 & X-4 & 0 \\ 25 & -25 & X-4 \end{vmatrix}$$

en développant par rapport à la dernière colonne, on trouve directement

$$\chi_A(X) = (X-4)\begin{vmatrix} X+1 & -5 \\ 0 & X-4 \\ 25 & -25 \end{vmatrix} = (X-4)(X+1)(X-4) = (X-4)^2(X+1)$$

– Les valeurs propres de A étant les racines de $\chi_A(X)$ on a $\boxed{sp(A) = \{-1{,}4\}}$

– Pour chaque valeur propre λ on va résoudre l'équation $(A-\lambda.I_3)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

– **Détermination de $E_4(A)$**
On a

$$(A-4.I_3)X = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -25 & 25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\boxed{E_4(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | y = x\} = \{\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} | (x{,}z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})}$$

– **Détermination de $E_{-1}(A)$**
On a

$$(A+1.I_3)X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -25 & 25 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\boxed{E_{-1}(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | y = 0 \text{ et } z = 5x\} = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 5x \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix})}$$

résolution 12

- Le polynôme caractéristique est donné par le déterminant

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & 1 & -1 \\ 3 & X+5 & -7 \\ 3 & 4 & X-6 \end{vmatrix}$$

Les transvections $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ puis $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$ donnent

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & 1 & -1 \\ 3 & X+5 & -7 \\ 0 & -X-1 & X+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+1 & 0 & -1 \\ 3 & X-2 & -7 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix}$$

en développant suivant la dernière ligne cela donne directement

$$\chi_A(X) = (X+1)\begin{vmatrix} X+1 & 0 \\ 3 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1)^2(X-2)$$

- Les valeurs propres de A étant les racines de $\chi_A(X)$ on a $\boxed{sp(A) = \{-1,2\}}$
- Pour chaque valeur propre λ on va résoudre l'équation $(A - \lambda.I_3)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- **Détermination de $E_2(A)$**

  On va résoudre le système $(A - 2I_3)X = 0$ par la méthode du pivot de Gauss

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -3 & -7 & 7 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Les transvections $L_3 \longleftarrow L_3 - L1$ et $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ donnent

$$A - 2I_3 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

La dilatation $L_2 \longleftarrow \dfrac{1}{6}L_2$ puis les transvections $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ et $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ donnent

$$A - 2I_3 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\boxed{E_2(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | x = 0 \text{ et } z = y\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})}$$

– $\boxed{\textbf{Détermination de } E_{-1}(A)}$

On va résoudre le système $(A+I_3)X=0$ par la méthode du pivot de Gauss

$$A+I_3=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -3 & -4 & 7\\ -3 & -4 & 7\end{pmatrix}$$

Les transvections $L_3 \longleftarrow L_3-L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2-4L_1$ donnent

$$A+I_3 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -3 & -4 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

La dilatation $L_2 \longleftarrow \dfrac{1}{3}L_2$ aboutit à

$$A+I_3 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\boxed{E_{-1}(A)=\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})|x=y=z\}=\{\begin{pmatrix}x\\ x\\ x\end{pmatrix}|x\in\mathbb{R}\}=\text{vect}(\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix})}$$

résolution 13 – Le polynôme caractéristique est donné par le déterminant

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 2 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

Les transvections $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ puis $C_3 \longleftarrow C_3 + C_1$ donnent

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 2 & X-2 & -1 \\ 1-X & 0 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -1 & X \\ 2 & X-2 & 1 \\ 1-X & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Le développement suivant la dernière ligne donne

$$\chi_A(X) = (1-X)\begin{vmatrix} -1 & X \\ X-2 & 1 \end{vmatrix} = (1-X)\left[-1 - X(X-2)\right] = (X-1)(X^2-2X+1) = (X-1)(X-1)^2$$

Comme $\chi_A(X) = (X-1)^3$
et que les valeurs propres de A sont les racines de $\chi_A(X)$ on a $\boxed{sp(A) = \{1\}}$

– **Détermination de $E_1(A)$**
On va résoudre le système $(A - I_3)X = 0$ par la méthode du pivot de Gauss

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les transvections $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donnent

$$A - I_3 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\boxed{E_1(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | x = y = z\} = \{\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})}$$

résolution 14 – Le polynôme caractéristique est donné par le déterminant ci-dessous

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-4 & 0 & 0 \\ 3 & X-6 & -1 \\ 6 & -4 & X-6 \end{vmatrix}$$

en développant par rapport à la première ligne, on trouve

$$\chi_A(X) = (X-4)\begin{vmatrix} X-6 & -1 \\ -4 & X-6 \end{vmatrix} = (X-4)\left[(X-6)^2-4\right] = (X-4)(X-6-2)(X-6+2) = (X-4)^2(X-8)$$

- Les valeurs propres de A sont les racines de $\chi_A(X)$,
  on a ainsi $sp(A) = \{4,8\}$ avec 4 valeur propre double et 8 valeur propre simple.
- Pour chaque valeur propre λ on va résoudre l'équation $(A-\lambda.I_3)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- **Détermination de $E_4(A)$**

  L'équation $(A-4I_3)X = 0$ correspond au système $\begin{cases} 0 & = 0 \\ -3x+2y+z & = 0 \\ -6x+4y+2z & = 0 \end{cases} \iff -3x+2y+z = 0$

  D'où

  $$E_4(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | z = 3x-2y\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x-2y \end{pmatrix} | (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

  $$E_4(A) = \{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} | (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$$

- **Détermination de $E_8(A)$**

  L'équation $(A-4I_3)X = 0$ correspond au système

  $$\begin{cases} -4x & = 0 \\ -3x-2y+z & = 0 \\ -6x+4y-2z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ -2y+z & = 0 \\ 4y-2z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ z & = 2y \end{cases}$$

  D'où

  $$E_8(A) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | x = 0 \text{ et } z = 2y\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

résolution 15 – Le polynôme caractéristique de B est donné par le déterminant

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-11 & 6 & -3 \\ -15 & X+10 & -3 \\ -15 & 6 & X+1 \end{vmatrix}$$

Les transvections $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$ puis $C_2 \longleftarrow C_2 + C_3$ donnent

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-11 & 6 & -3 \\ -15 & X+10 & -3 \\ 0 & -X-4 & X+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-11 & 3 & -3 \\ -15 & X+7 & -3 \\ 0 & 0 & X+4 \end{vmatrix}$$

puis en développant par rapport à la dernière ligne

$$\chi_B(X) = (X+4)\begin{vmatrix} X-11 & 3 \\ -15 & X+7 \end{vmatrix} = (X+4)\left[(X-11)(X+7)+45\right] = (X+4)(X^2-4X-32)$$

Un calcul de discriminant donne -4 et 8 comme racines de $X^2-4X-32$

On obtient ainsi $\chi_B(X) = (X+4)^2(X-8)$

Conclusion: $sp(B) = \{-4{,}8\}$ avec -4 valeur propre double et 8 valeur propre simple

– Pour chaque valeur propre λ on considère l'équation $(B-\lambda I_3)X = 0$ avec $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

– $\boxed{\textbf{Détermination de } E_{-4}(B)}$

L'équation $(B+4I_3)X = 0$ correspond au système $\begin{cases} 15x-6y+3z &= 0 \\ 15x-6y+3z &= 0 \\ 15x-6y+3z &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow 5x-2y+z=0$

$$E_{-4}(B) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | z = -5x+2y\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -5x+2y \end{pmatrix} |(x{,}y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$E_{-4}(B) = \{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} |(x{,}y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

– $\boxed{\textbf{Détermination de } E_8(B)}$

On va résoudre le système $(B-8I_3)X = 0$ par la méthode du pivot de Gauss

$$B - 8I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 15 & -18 & 3 \\ 15 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

En divisant chaque ligne par 3,
puis en effectuant les transvections $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$ on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

En effectuant $L_2 \leftarrow \dfrac{1}{4}L_2$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2$ et $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E_8(B) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | x = y = z\} = \{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})}$$

résolution 16

– On écrit la matrice de φ dans la base (f,g,h)

– On a $\varphi(f) = f$.
(Ceci prouve que 1 est valeur propre de φ et que f est un vecteur propre associé)

– Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = e^x + xe^x = f(x) + g(x)$
Ainsi $\varphi(g) = f + g$

– Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h'(x) = 2xe^x + x^2e^x = 2g(x) + h(x)$
Ainsi $\varphi(h) = 2g + h$

– Ceci nous permet d'écrire

$$A = \mathrm{Mat}_{(f,g,h)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\chi_\varphi(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -2 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^3$$

$\boxed{sp(\varphi) = \{1\} \text{ et 1 est une valeur propre triple}}$

– **Détermination de $E_1(\varphi)$**

i) **première méthode**
On résout l'équation $\varphi(u) = 1.u$, c'est à dire l'équation différentielle $u' - u = 0$.
La solution générale de cette équation différentielle est $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A.e^x \end{array}$ avec $A \in \mathbb{R}$
On a prouvé que $\boxed{E_1(\varphi) = \{A.f | A \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(f)}$

ii) **seconde méthode**
Soit $u = x.f + y.g + z.h \in E$.
On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} u \in E_1(\varphi) &\iff \varphi(u) = u \\ &\iff \mathrm{Mat}_{(f,g,h)}(\varphi(u)) = \mathrm{Mat}_{(f,g,h)}(u) \\ &\iff A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} y & = 0 \\ 2z & = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a prouvé que $\boxed{E_1(\varphi) = \{x.f + y.g + z.h | y = z = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}\} = \{x.f | x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(f)}$

résolution 17