Développement en série entière (2A)

exercice 1

DÃ©terminer le DSE de $f : x \mapsto \cos^2(x)$

exercice 2

DÃ©terminer le DSE de $f : x \mapsto \ln(2 + 4x^2)$

exercice 3

DÃ©terminer le DSE de $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2-x}{1-x^2}\right)$

exercice 4

exercice 5

exercice 6

Solutions

résolution 1

- On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

et que

$$\forall X \in \mathbb{R},\ \cos X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}.X^{2n}$$

- On a donc pour x rÃ©el

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\cos(2x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}.(2x)^{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n.4^n}{(2n)!}.x^{2n} \end{aligned}$$

- Conclusion:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!}.x^{2n}$$

résolution 2

- On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(2+4x^2) = \ln 2 + \ln(1+2x^2)$$

et que

$$\forall X \in]-1,+1[,\ \ln(1+X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.X^n$$

- Comme on a

$$|2x^2| < 1 \Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on a donc pour tout $x \in]-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}[$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2) + \ln(1+2x^2) \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.(2x^2)^n \\ &= \ln 2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n}.x^{2n} \end{aligned}$$

- Conclusion:

$$\forall x \in]-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}[,\ f(x) = \ln 2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n}.x^{2n}$$

résolution 3

- On sait que pour tout $x \in]-1,+1[$ on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2-x) - \ln(1-x^2) \\ &= \ln(2) + \ln(1-\frac{x}{2}) - \ln(1-x^2) \end{aligned}$$

et que

$$\forall X \in]-1,+1[, \ln(1-X) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n}$$

- On a donc pour tout $x \in]-1,+1[$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x/2)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} \\ &= \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} \end{aligned}$$

- Conclusion:

$$\forall x \in]-1,+1[, f(x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$$

- remarques
  - On ne peut ici Ã©crire la sÃ©rie avec un unique signe Σ sauf Ã perdre en lisibilitÃ©
  - En effet, on a

$$\forall x \in]-1,+1[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

avec

- $a_0 = \ln 2$
- si n est impair alors $a_n = \dfrac{-1}{n.2^n}$
- si n est pair non nul alors $a_n = \dfrac{-1}{n.2^n} - \dfrac{2}{n}$

$\boxed{\textbf{résolution 4}}$

$\boxed{\textbf{résolution 5}}$

résolution 6