Dérivées partielles

exercice 1 (*)

On considère la fonction

$$f:\begin{array}{ccl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} y^2 & \text{si } x \geqslant 0\\ x+y^2 & \text{si } x<0\end{cases}\end{array}$$

Etudier l'existence des dérivées partielles premières en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

exercice 2 (*)

On considère la fonction

$$f:\begin{array}{ccl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} y^2+x^2 & \text{si } x \geqslant 0\\ y^2-x^2 & \text{si } x<0\end{cases}\end{array}$$

Etudier l'existence des dérivées partielles premières en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

exercice 3

On considère la fonction

$$f:\begin{array}{ccl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} x^2.\ln|y| & \text{si } y \neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}\end{array}$$

Etudier l'existence des dérivées partielles premières en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

exercice 4 (**)

On considère la fonction

$$f:\begin{array}{ccl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} x^2-y^2 & \text{si } x \geqslant y\\ x^3-y^3 & \text{si } x<y\end{cases}\end{array}$$

Etudier l'existence des dérivées partielles premières en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

exercice 5 (**)

On considère la fonction

$$f:\begin{array}{ccl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } x+y=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{array}$$

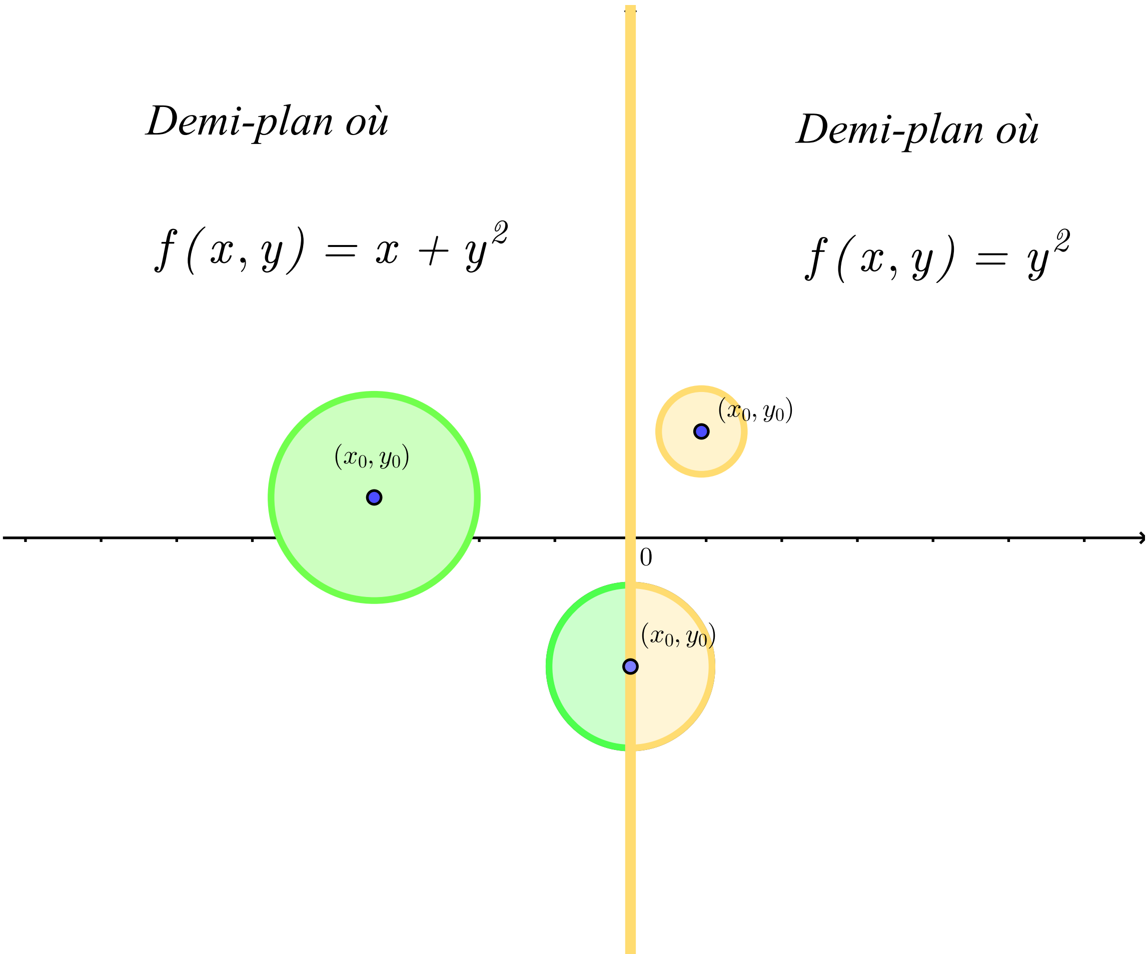
Etudier l'existence des dérivées partielles premières en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

exercice 6

Solutions

résolution 1

- Trois cas sont à envisager



- **premier cas: étude en (x_0,y_0) avec $x_0 > 0$**

  En ce point, et au voisinage de ce point, on a $f : (x,y) \mapsto y^2$.
  f est donc C^∞ sur un voisinage de (x_0,y_0).
  On en déduit que
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$
  - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0$

- **deuxième cas: étude en (x_0,y_0) avec $x_0 < 0$**

  En ce point, et au voisinage de ce point, on a $f : (x,y) \mapsto x + y^2$.
  f est donc C^∞ sur un voisinage de (x_0,y_0).
  On en déduit que
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 1$
  - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0$

- $\boxed{\textbf{troisième cas: étude en } (x_0,y_0) \textbf{ avec } x_0 = 0}$

  En ce point, et au voisinage de ce point, l'expression de f n'est pas donnée par une "unique expression": il s'agit donc d'étudier un recollement et il faut revenir à la définition!

  Soit $h \neq 0$.

  i) On a

  $$\frac{f(h,y_0) - f(0,y_0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{y_0^2 - y_0^2}{h} = 0 & \text{si } h > 0 \\ \dfrac{y_0^2 + h - y_0^2}{h} = 1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

  On a donc

  $$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h,y_0) - f(0,y_0)}{h} = 0 \neq 1 = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h,y_0) - f(0,y_0)}{h}$$

  ce qui prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$ n'existe pas

  ii) On a

  $$\frac{f(0,y_0 + h) - f(0,y_0)}{h} = \frac{(y_0 + h)^2 - y_0^2}{h} = 2y_0 + h$$

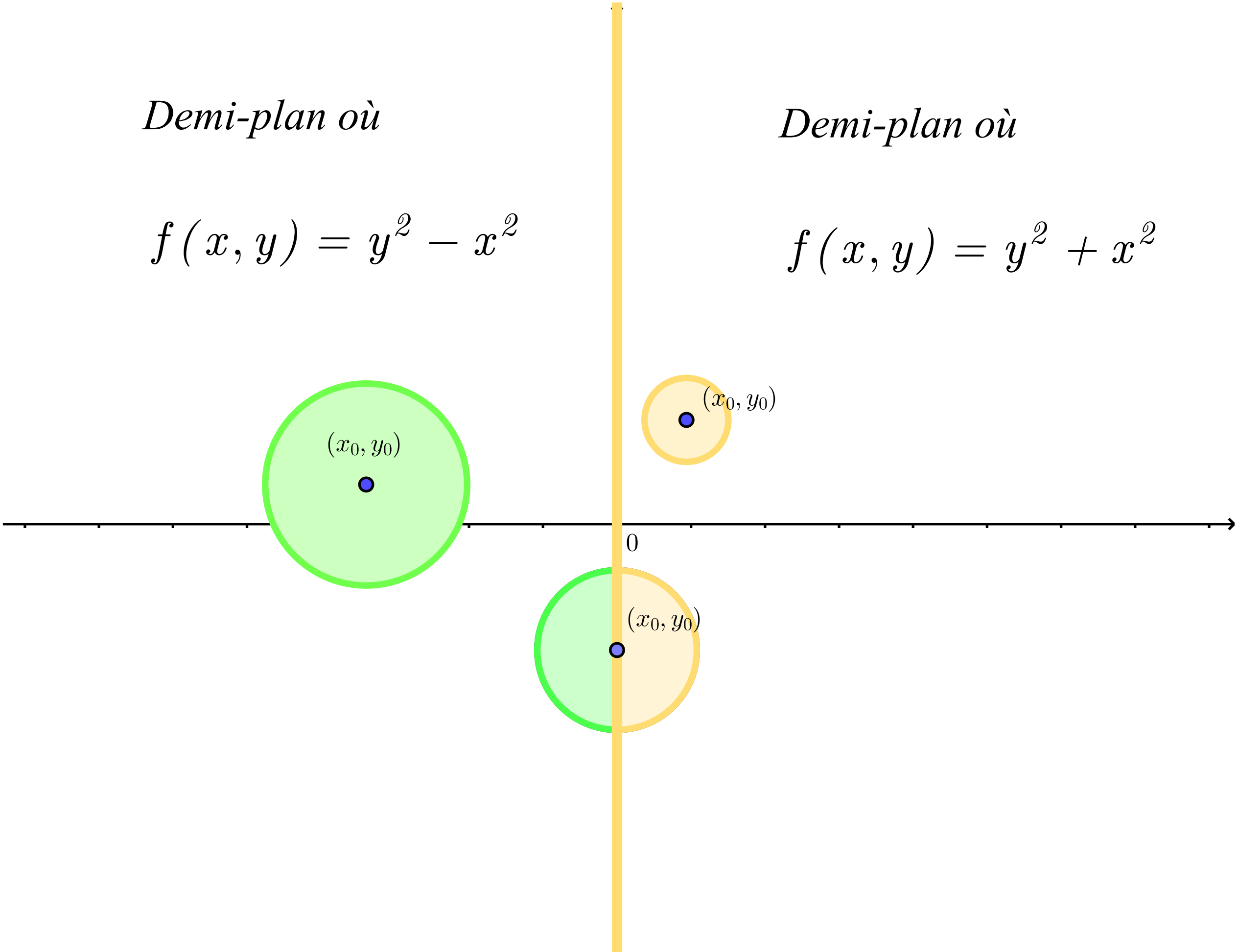
  On a donc

  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(0,y_0 + h) - f(0,y_0)}{h} = 2y_0$$

  ce qui prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)$ existe et vaut $2y_0$

$\boxed{\textbf{résolution 2}}$

- Trois cas sont à envisager



- $\boxed{\textbf{premier cas: étude en } (x_0,y_0) \textbf{ avec } x_0 > 0}$

  En ce point, et au voisinage de ce point, on a $f : (x,y) \mapsto y^2 + x^2$.
  f est donc C^∞ sur un voisinage de (x_0,y_0).
  On en déduit que
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0$
  - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0$

- $\boxed{\textbf{deuxième cas: étude en } (x_0,y_0) \textbf{ avec } x_0 < 0}$

  En ce point, et au voisinage de ce point, on a $f : (x,y) \mapsto y^2 - x^2$.
  f est donc C^∞ sur un voisinage de (x_0,y_0).
  On en déduit que
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -2x_0$
  - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0$

- $\boxed{\textbf{troisième cas: étude en } (x_0,y_0) \textbf{ avec } x_0 = 0}$

  En ce point, et au voisinage de ce point, l'expression de f n'est pas donnée par une "unique expression": il s'agit donc d'étudier un recollement et il faut revenir à la définition!

  Soit $h \neq 0$.

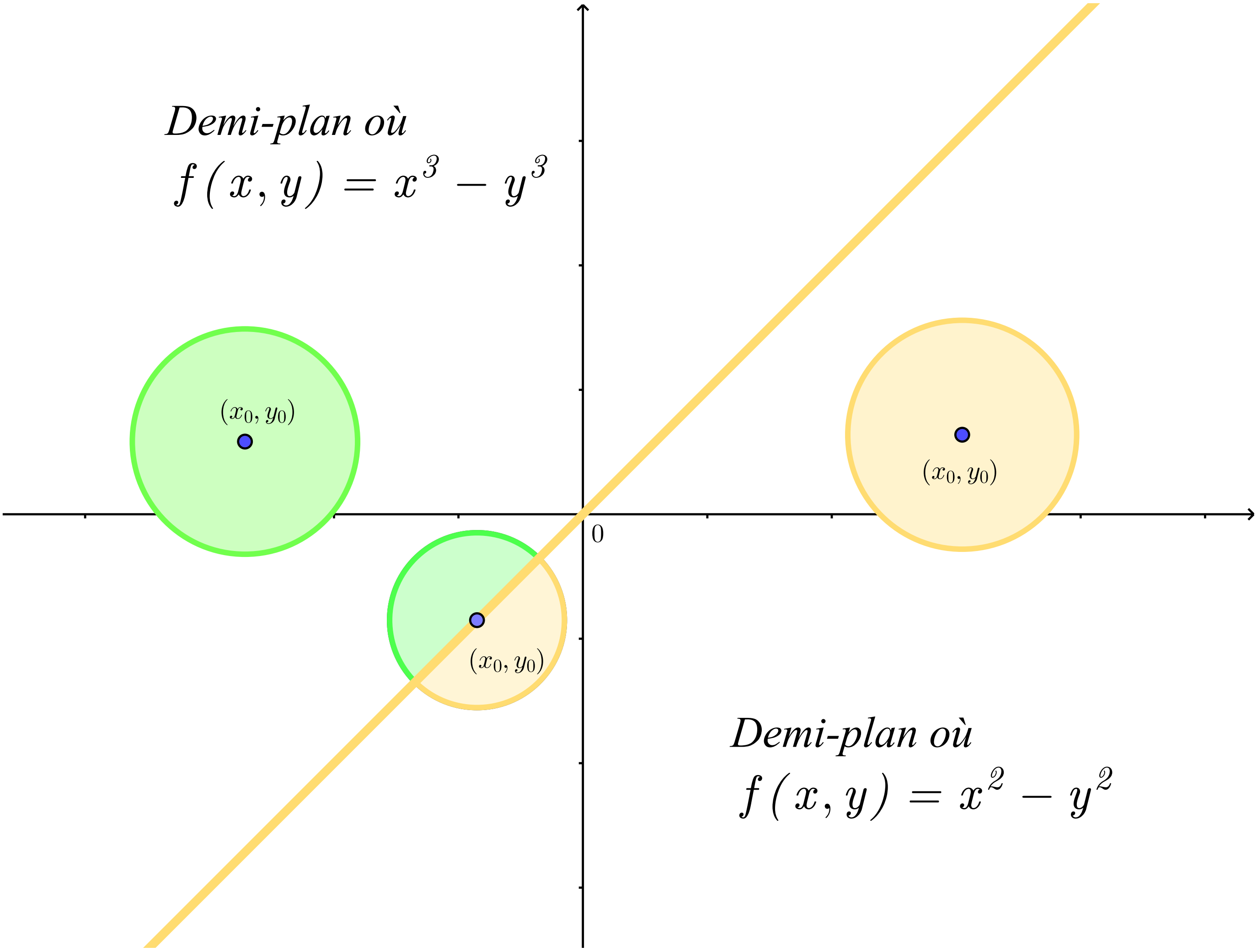
  i) On a
  $$\frac{f(h,y_0) - f(0,y_0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{y_0^2 + h^2 - y_0^2}{h} = h & \text{si } h > 0 \\ \dfrac{y_0^2 - h^2 - y_0^2}{h} = -h & \text{si } h < 0 \end{cases}$$
  On a donc
  $$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h,y_0) - f(0,y_0)}{h} = 0 = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h,y_0) - f(0,y_0)}{h}$$
  ce qui prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$ existe et vaut 0

  ii) On a
  $$\frac{f(0,y_0+h) - f(0,y_0)}{h} = \frac{(y_0+h)^2 - y_0^2}{h} = 2y_0 + h$$
  On a donc
  $$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,y_0+h) - f(0,y_0)}{h} = 2y_0$$
  ce qui prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)$ existe et vaut $2y_0$

résolution 3

résolution 4

- Trois cas sont à envisager



- **premier cas: étude en (x_0,y_0) avec $x_0 > y_0$**

  En ce point, et au voisinage de ce point, on a $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$.
  f est donc C^∞ sur un voisinage de (x_0,y_0).
  On en déduit que
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0$
  - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -2y_0$

- **deuxième cas: étude en (x_0,y_0) avec $x_0 < y_0$**

  En ce point, et au voisinage de ce point, on a $f : (x,y) \mapsto x^3 - y^3$.
  f est donc C^∞ sur un voisinage de (x_0,y_0).
  On en déduit que
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 3x_0^2$
  - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -3y_0^2$

- $\boxed{\textbf{troisième cas: étude en } (x_0,y_0) \textbf{ avec } x_0 = y_0}$

En ce point, et au voisinage de ce point, l'expression de f n'est pas donnée par une "unique expression": il s'agit donc d'étudier un recollement et il faut revenir à la définition!

Soit $h \neq 0$.

i) On a

$$\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{(x_0+h)^2 - y_0^2 - (x_0^2 - y_0^2)}{h} = 2x_0 + h & \text{si } h > 0 \\ \dfrac{(x_0+h)^3 - y_0^3 - (x_0^3 - y_0^3)}{h} = 3x_0^2 + 3hx_0 + h^2 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

On a donc

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = 2x_0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = 3x_0^2$$

Et donc deux cas sont à considérer

(a) *si* $2x_0 \neq 3x_0^2$ *(càd* $x_0 \neq 0$ *et* $x_0 \neq 2/3$*)*
alors $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ n'existe pas et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ n'existe pas.

(b) *si* $2x_0 = 3x_0^2$ *(càd* $x_0 = 0$ *ou* $x_0 = 2/3$*)*
alors $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = 2x_0$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe et vaut $2x_0$

ii) On a

$$\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{x_0^2 - (y_0+h)^2 - (x_0^2 - y_0^2)}{h} = -2y_0 - h & \text{si } h < 0 \\ \dfrac{(x_0^3 - (y_0+h)^3 - (x_0^3 - y_0^3)}{h} = -3y_0^2 - 3hy_0 - h^2 & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

On a donc

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} = -2y_0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} = -3y_0^2$$

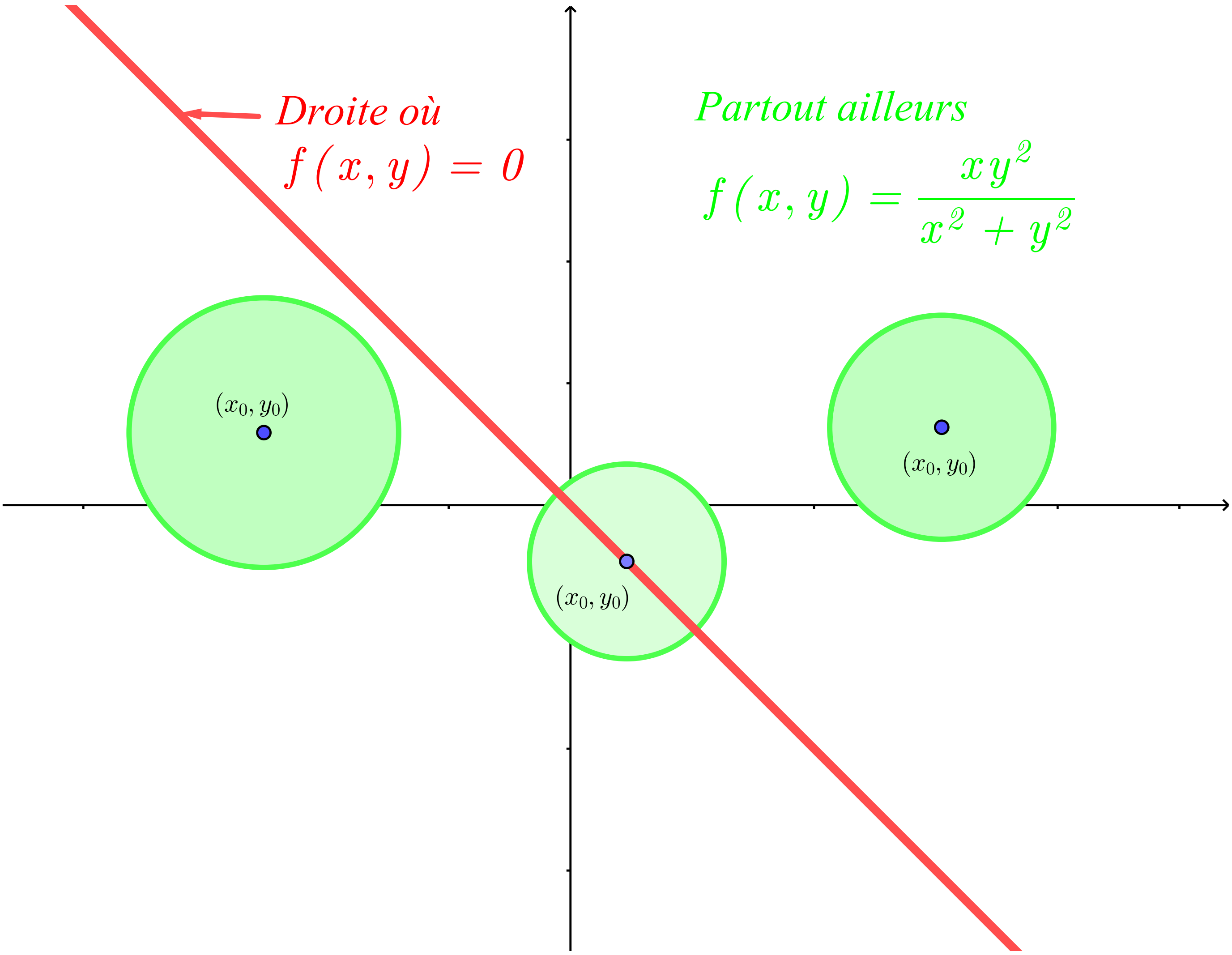
Et donc deux cas sont à considérer

(a) *si* $2y_0 \neq 3y_0^2$ *(càd* $y_0 \neq 0$ *et* $y_0 \neq 2/3$*)*
alors $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$ n'existe pas et donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ n'existe pas.

(b) *si* $2y_0 = 3y_0^2$ *(càd* $y_0 = 0$ *ou* $y_0 = 2/3$*)*
alors $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} = -2y_0$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existe et vaut $-2y_0$

résolution 5

- Deux cas sont à envisager



- **premier cas: étude en (x_0,y_0) avec $x_0+y_0\neq 0$**

En ce point, et au voisinage de ce point, on a $f:(x,y)\mapsto \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.
f est donc C^∞ sur un voisinage de (x_0,y_0).
On en déduit que

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{y_0^2(y_0^2-x_0^2)}{(x_0^2+y_0^2)^2}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existe et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\dfrac{2x_0^3y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}$

- $\boxed{\textbf{deuxième cas: étude en } (x_0,y_0) \textbf{ avec } x_0+y_0=0}$

En ce point, et au voisinage de ce point, l'expression de f n'est pas donnée par une "unique expression": il s'agit donc d'étudier un recollement et il faut revenir à la définition!

Soit $h \neq 0$.

i) On a

$$\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\frac{f(x_0+h,-x_0)-0}{h}=\frac{x_0^2(x_0+h)}{h.\left[(x_0+h)^2+x_0^2\right]}$$

Deux cas sont à considérer:

(a) si $x_0 \neq 0$

on a $\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{x_0^3}{h.(2x_0^2)} = \dfrac{x_0}{2h}$ et donc ne possède pas de limite finie quand $h \to 0$.

Ceci prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,-x_0)$ n'existe pas pour $x_0 \neq 0$

(b) si $x_0 = 0$

on a $\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = 0$ et donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = 0$

Ceci prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0

ii) On a

$$\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}=\frac{f(x_0,-x_0+h)-0}{h}=\frac{x_0(h-x_0)^2}{h.\left[x_0^2+(h-x_0)^2\right]}$$

Deux cas sont à considérer:

(a) si $x_0 \neq 0$

on a $\dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{x_0^3}{h.(2x_0^2)} = \dfrac{x_0}{2h}$ et donc ne possède pas de limite finie quand $h \to 0$.

Ceci prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,-x_0)$ n'existe pas pour $x_0 \neq 0$

(b) si $x_0 = 0$

on a $\dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} = 0$ et donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} = 0$

Ceci prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0

$\boxed{\textbf{résolution 6}}$