Table des matières

Réduction des coniques

exercice 1 (*)

Réduire la conique d'équation

$$4x^2 + 2x + y + 1 = 0$$

et donner ses éléments

exercice 2 (*)

Réduire la conique d'équation

$$x^2 + 2y^2 + 6x - 4y = 0$$

exercice 3 (**)

Réduire la conique d'équation

$$3\,x^2 + 2\,\sqrt{3}xy - 8\,\sqrt{3}x + y^2 - 8\,y - 8 - 4\,x + 4\,\sqrt{3}y = 0$$

exercice 4 (**)

Réduire la conique d'équation

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$

exercice 5 (**)

Réduire la conique d'équation

$$3x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$$

exercice 6 (**)

Réduire la conique d'équation

$$x^2 - 10xy + 11y^2 - 10x + 22y + 27 = 0$$

exercice 7 (*)

RÃ©duire la conique d'Ã©quation

$$x(x-1) + (y-2)(y-3) = 0$$

et donner ses Ã©lÃ©ments

exercice 8

Solutions

résolution 1

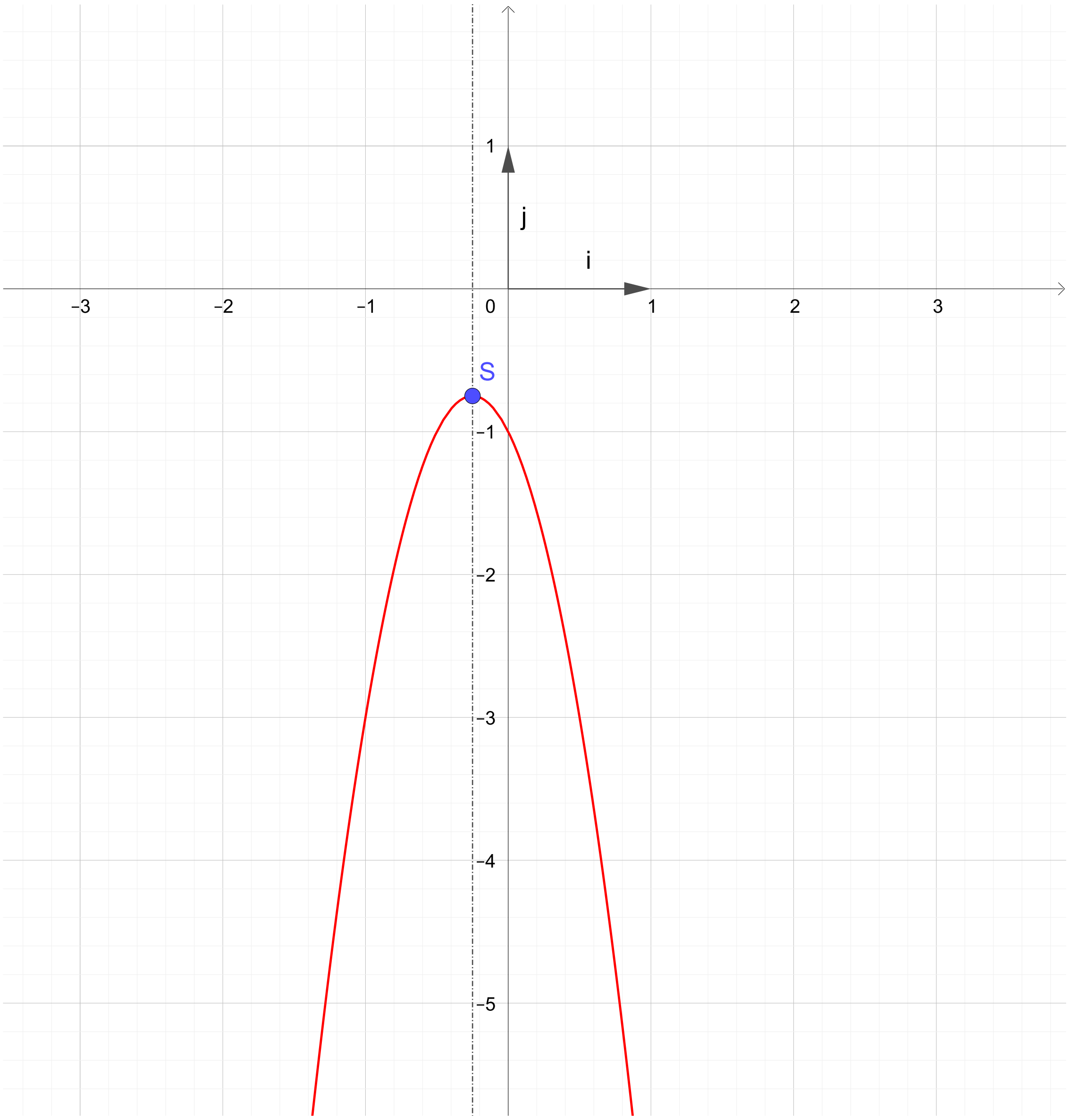
Il n'y a pas de terme croisé xy: il suffit de mettre sous forme canonique les trinÃ´mes!
remarque: ici on a de suite y qui est une fonction du second degré de x, donc c'est une parabole!

On a

$$\begin{aligned}
4x^2+2x+y+1=0 &\iff y=-4x^2-2x-1\\
&\iff y=-4(x^2+\frac{x}{2})-1\\
&\iff y=-4\left[(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{4^2}\right]-1\\
&\iff y=-4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Sous cette forme, on reconnait l'équation d'une parabole

- de sommet $(-\frac{1}{4},-\frac{3}{4})$
- d'axe de symétrie la droite d'équation $x=-\frac{1}{4}$



S
j
i
−3
−2
−1
0
1
2
3
1
−1
−2
−3
−4
−5

$\boxed{\textbf{résolution 2}}$ Il n'y a pas de terme croisé xy: il suffit de mettre sous forme canonique les trinÃ´mes!

- On a

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9 \qquad \text{et} \qquad 2y^2 - 4y = 2(y^2 - 2y) = 2\left[(y-1)^2 - 1\right]$$

D'où

$$x^2 + 2y^2 + 6x - 4y = (x+3)^2 - 2(y-1)^2 - 11$$

L'équation de la conique s'écrit ainsi

$$(x+3)^2 - 2(y-1)^2 = 11$$

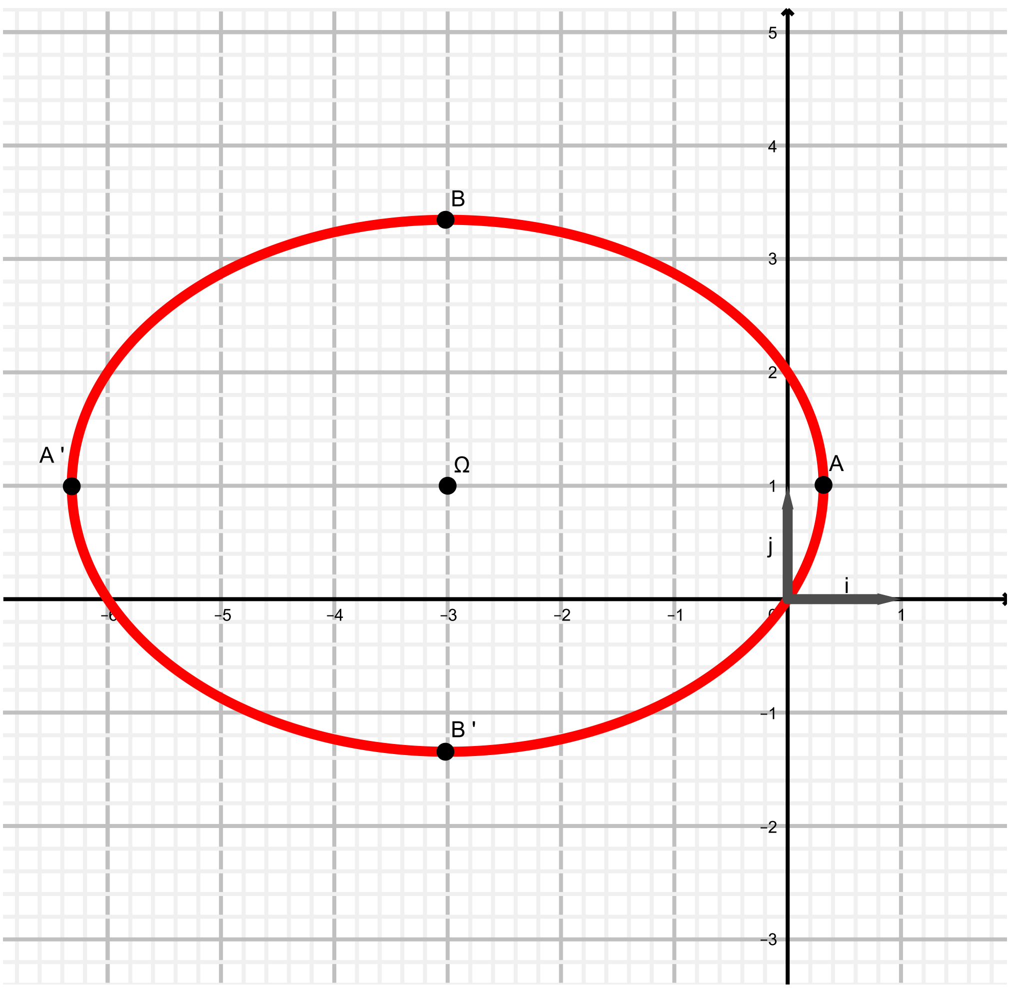
c'est à dire

$$\frac{(x+3)^2}{(\sqrt{11})^2} - \frac{(y-1)^2}{\left(\sqrt{\frac{11}{2}}\right)^2} = 1$$

Sous cette forme, on reconnait l'équation d'une ellipse

  - de centre $\Omega(-3,1)$
  - de demi-grand axe $a = \sqrt{11}$
  - de demi-petit axe $b = \sqrt{\frac{11}{2}}$
  - les sommets sont les points

$$A(-3+\sqrt{11},1) \qquad A'(-3-\sqrt{11},1) \qquad B(-3+\sqrt{\frac{11}{2}}) \qquad B'(-3-\sqrt{\frac{11}{2}})$$



$\boxed{\textbf{résolution 3}}$ On suit la méthode standard:

- L'équation de la conique dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ est

$$3\,x^2 + 2\,\sqrt{3}xy - 8\,\sqrt{3}x + y^2 - 8\,y - 8 - 4\,x + 4\,\sqrt{3}y = 0$$

- On pose $\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = \begin{pmatrix} -8\sqrt{3} - 4 & -8 + 4\sqrt{3} \end{pmatrix}}$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
  Ainsi l'équation s'écrit ${}^tUAU + LU - 8 = 0$
- *remarque (qui n'est pas nécessaire du tout): comme* $\det(A) = 0$ *la conique est du genre parabole. Ceci signifie que si la conique n'est pas dégénérée alors c'est une parabole.*
- On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$
  Notons $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.
- Notons $\vec{I} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{i} - \sqrt{3}\,\overrightarrow{j})$ et $\vec{J} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.
  Notons (X,Y) les coordonées dans le repère $\mathcal{R}(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$.
  La formule de changement de base donne $U = PV$
- ${}^tUAU = {}^tVDV = 0.X^2 + 4.Y^2$ et $LU = LPV = \begin{pmatrix} -8 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -8X - 16Y$
  L'équation dans le nouveau repère est donc

$$4Y^2 - 8X - 16Y - 8 = 0$$

  soit

$$Y^2 - 4Y - 2X - 2 = 0$$

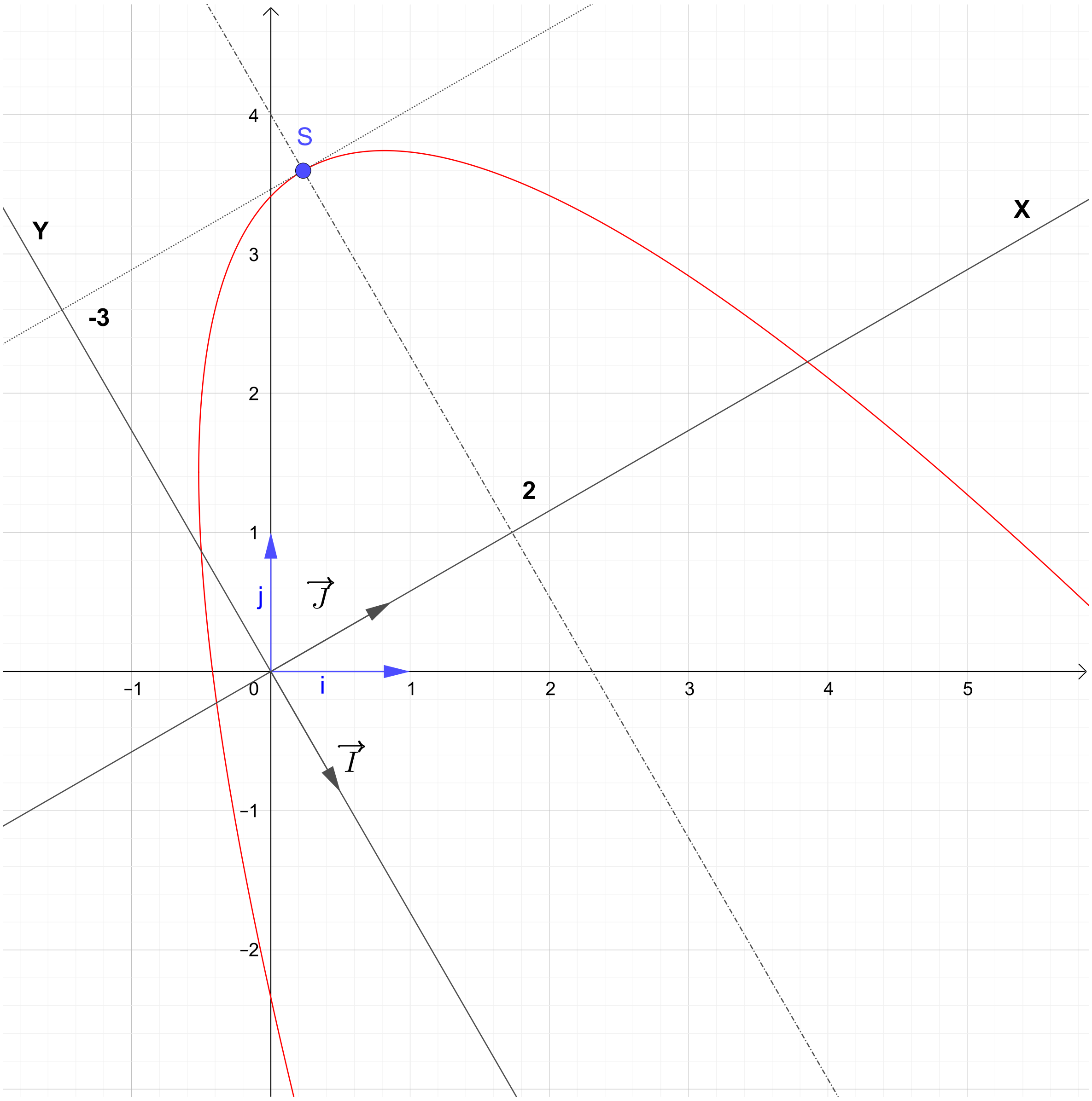
  ou encore

$$\boxed{(Y-2)^2 = 2(X+3)}$$

- **X est une fonction du second degré de Y, il s'agit donc d'une parabole.**

Quelques précisions:

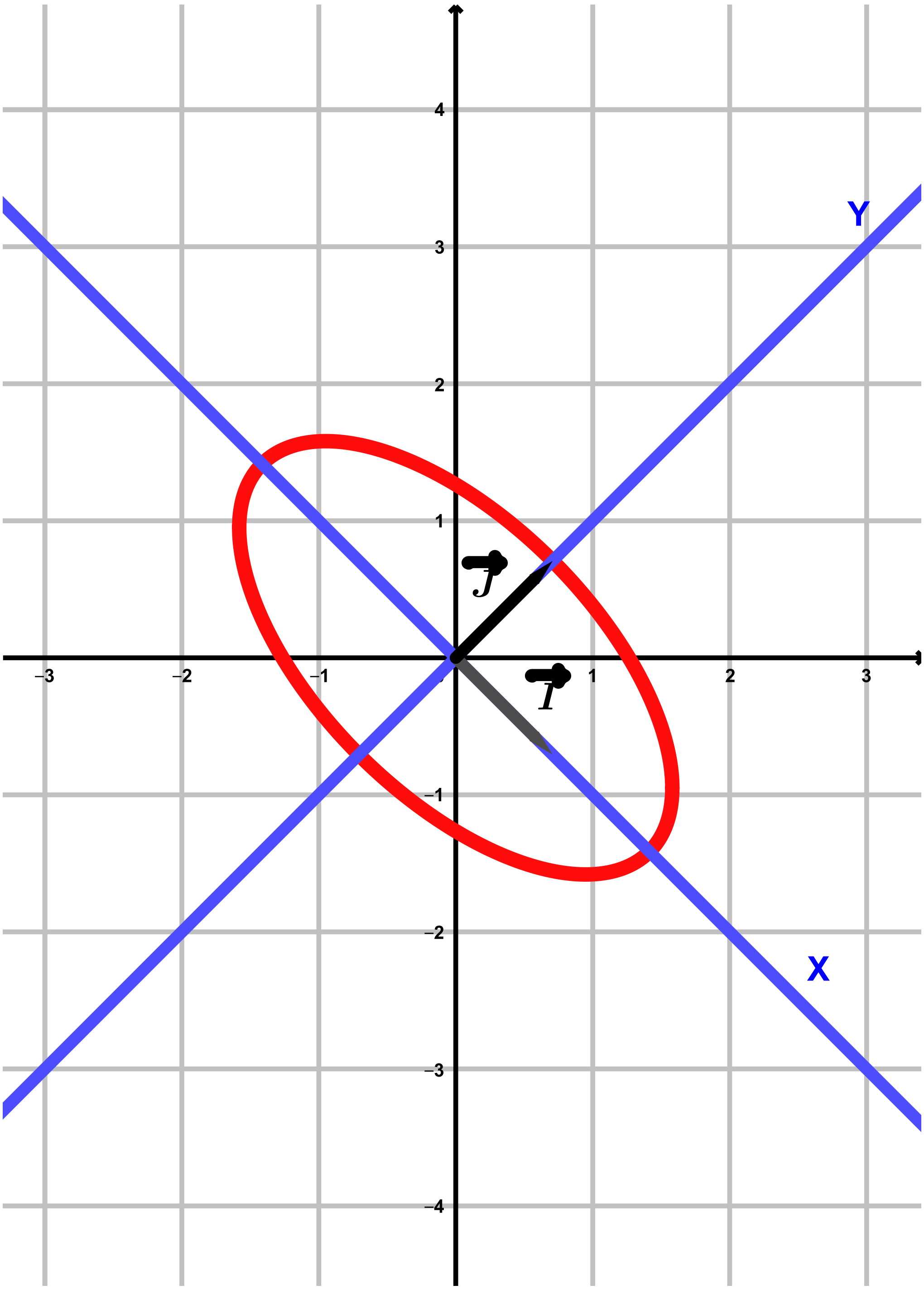
- Dans le nouveau repère, le sommet de la parabole a pour coordonnées $(-3,2)$.
  Dans le repère initial les coordonées sont alors $P.\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + 1 \end{pmatrix}$
- L'axe de symétrie a pour équation dans le nouveau repère $Y - 2 = 0$
  Or $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}U = {}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a donc $Y = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x + y)$
  L'équation de l'axe de symétrie dans le repère initial est donc $\boxed{\sqrt{3}x + y - 4 = 0}$


S
X
Y
-3
2
j
i
$\overrightarrow{J}$
$\overrightarrow{I}$
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
1
2
3
4
5

résolution 4 On suit la méthode standard:

- L'équation de la conique dans $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ est
$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$
- On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Ainsi l'équation s'écrit
$$^tUAU - 8 = 0$$
- *remarque (qui n'est pas nécessaire du tout): comme* $\det(A) = 16 > 0$ *la conique est du genre ellipse. Ceci signifie que si la conique n'est pas dégénérée alors c'est une ellipse.*
- On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$
- Notons $\overrightarrow{I} = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{J} = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$
Notons (X,Y) les coordonées dans le repère $\mathcal{R}(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$.
La formule de changement de base donne $U = PV$
- $^tUAU = {}^tVDV = 2.X^2 + 8.Y^2$
L'équation dans le nouveau repère est donc
$$2X^2 + 8Y^2 - 8 = 0$$
c'est à dire
$$\frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{1^2} = 1$$
On reconnait l'équation réduite d'une ellipse.

Quelques précisions
  - Dans le nouveau repère:
    - le demi-petit axe vaut 1 et le demi-grand axe vaut 2
    - le centre de symétrie est le point $O(0,0)$
    - les axes de symétries sont les droites d'équation $X = 0$ et $Y = 0$
    - les sommets sont les points
$$A(X = 0,Y = 1) \qquad A'(X = 0,Y = -1) \qquad B(X = 2,Y = 0) \qquad B'(X = -2,Y = 0)$$
  - Comme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{X+Y}{} \\ \dfrac{-X+Y}{} \end{pmatrix}$, les coordonnées des sommets dans $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ sont
$$A(-,) \qquad A'(-,-) \qquad B(,) \qquad B'(-,-)$$
  - Comme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$
les axes de symétries dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ ont pour équation $x + y = 0$ et $x - y = 0$


4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
1
2
3
Y
X
$\vec{\jmath}$
$\vec{\imath}$

$\boxed{\textbf{résolution 5}}$ On suit la méthode standard:

- L'équation de la conique dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ est

$$3x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$$

- On pose $\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & \\ & 1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}}$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
  Ainsi l'équation s'écrit ${}^tUAU + LU + 4 = 0$
- *remarque (qui n'est pas nécessaire du tout): comme* $\det(A) = 0$ *la conique est du genre parabole. Ceci signifie que si la conique n'est pas dégénérée alors c'est une parabole.*
- On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$
  Notons $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.
- Notons $\vec{I} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\vec{J} = \dfrac{1}{2}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.
  Notons (X,Y) les coordonées dans le repère $\mathcal{R}(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$.
  La formule de changement de base donne $U = PV$
- ${}^tUAU = {}^tVDV = 4.X^2 + 0.Y^2$ et $LU = LPV = \begin{pmatrix} 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 8X$
  L'équation dans le nouveau repère est donc

$$4X^2 + 8X + 4 = 0$$

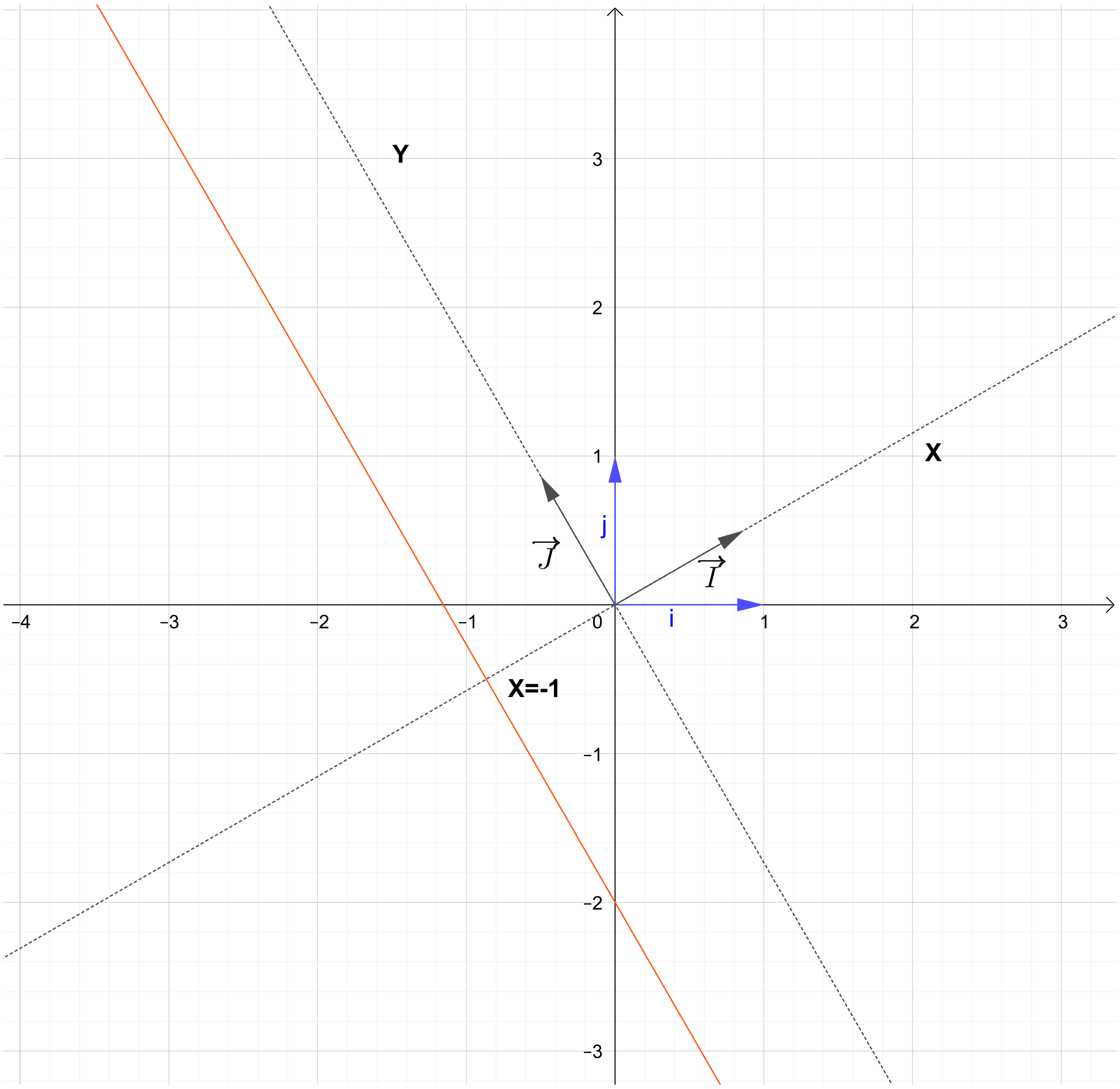
  soit

$$X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2 = 0$$

  ou encore

$$\boxed{X = -1}$$

  On reconnait **l'équation d'une droite.**
- Comme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =^t P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$
  l'équation de cette droite dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ est $x + y + 2 = 0$


Y
X
X=-1
j
i
$\vec{J}$
$\vec{I}$
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
-1
-2
-3

résolution 6 On suit la méthode standard:

- L'équation de la conique dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ est

$$x^2 - 10xy + 11y^2 - 10x + 22y + 27 = 0$$

- On pose $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = \begin{pmatrix} -10\sqrt{3} & 22 \end{pmatrix}}$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
  Ainsi l'équation s'écrit ${}^tUAU + LU + 27 = 0$
- *remarque (qui n'est pas nécessaire du tout): comme* $\det(A) = -64 <$ *la conique est du genre hyperbole.*
  Ceci signifie que si la conique n'est pas dégénérée alors c'est une hyperbole.
- On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$
  Notons $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.
- Notons $\vec{I} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{i} - \sqrt{3}\overrightarrow{j})$ et $\vec{J} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.
  Notons (X,Y) les coordonées dans le repère $\mathcal{R}(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$.
  La formule de changement de base donne $U = PV$
- ${}^tUAU = {}^tVDV = 16.X^2 - 4.Y^2$ et $LU = LPV = \begin{pmatrix} -16 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -16X - 4Y$
  L'équation dans le nouveau repère est donc

$$16X^2 - 4Y^2 - 16X - 4Y + 27 = 0$$

  en mettant sous forme canonique, cela donne

$$16\left(X - \frac{}{2}\right)^2 - 4\left(Y + \frac{1}{2}\right)^2 + 16 = 0$$

  soit encore

$$\frac{\left(Y + \frac{1}{2}\right)^2}{2^2} - \frac{\left(X - \frac{}{2}\right)^2}{1^2} = 1$$

- **On reconnait l'équation d'une hyperbole.**

Quelques précisions

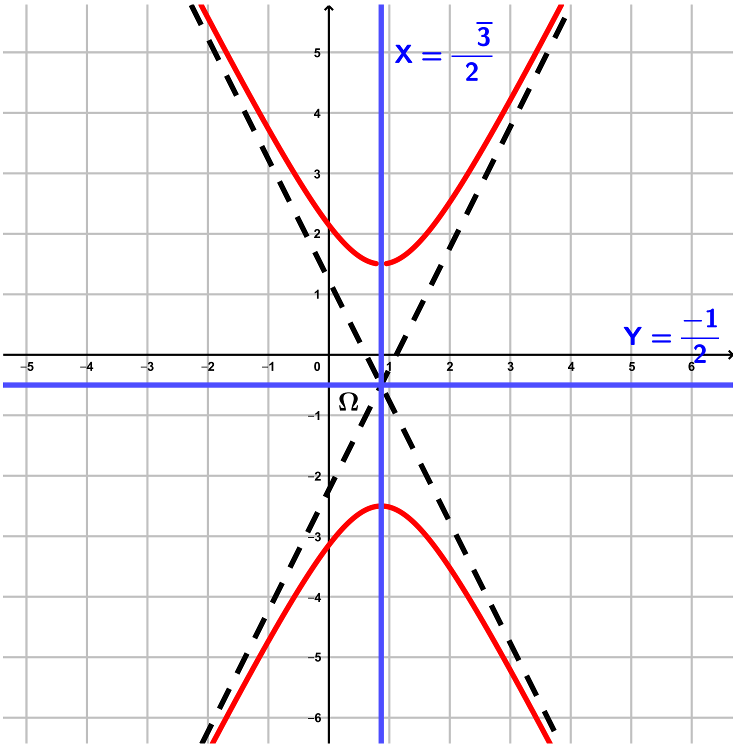
- Dans le repère ,
  - le centre de symétrie est le point $\Omega(\frac{}{2}, -\frac{1}{2})$
  - les axes de symétrie ont pour équation $X = \frac{}{2}$ et $Y = \frac{-1}{2}$
  - les droites asymptotes sont données par

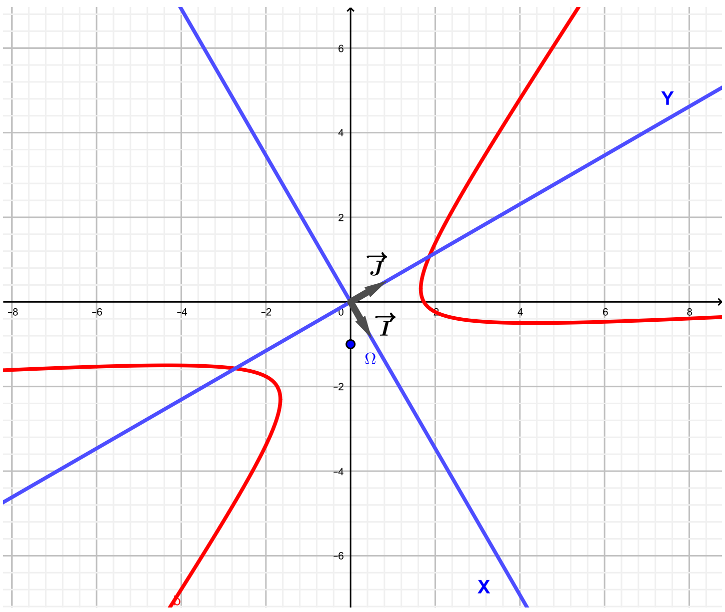
$$\frac{\left(Y + \frac{1}{2}\right)^2}{2^2} - \frac{\left(X - \frac{}{2}\right)^2}{1^2} = 0$$

c'est à dire

$$\left[\frac{\left(Y+\frac{1}{2}\right)}{2}-\left(X-\frac{}{2}\right)\right]\cdot\left[\frac{\left(Y+\frac{1}{2}\right)}{2}+\left(X-\frac{}{2}\right)\right]=0$$

Ce sont donc les droites d'équation $Y-2X+\frac{1}{2}+\sqrt{3}=0$ et $Y+2X+\frac{1}{2}-\sqrt{3}=0$





$\boxed{\textbf{résolution 7}}$

résolution 8