Bijections

exercice 1 (*)

Soit $h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y) = (u+v^2,v) \end{array}$.

Justifier que h *est une bijection de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

exercice 2 (**)

Soit

- $\Delta = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$
- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant y\}$
- $h: \begin{array}{rcl} \Delta & \longrightarrow & D \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y) = (u^2+v,v) \end{array}$

Justifier que h *est une bijection de* Δ *sur* D.

exercice 3 (**)

Soit $h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y) = (u^3+v^3,u^3-v^3) \end{array}$.

Justifier que h *est une bijection de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

exercice 4 (**)

Soit

- $\Delta =]0,+\infty[^2$
- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > |y|\}$
- $h: \begin{array}{rcl} \Delta & \longrightarrow & D \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y) = (u^2+v^2,u^2-v^2) \end{array}$

Justifier que h *est une bijection de* Δ *sur* D.

exercice 5 (***)

Soit

- $\Delta =]0,1] \times [0,2\pi[$
- $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1|\}$
- $h: \begin{array}{rcl} \Delta & \longrightarrow & D \\ (r,\theta) & \longmapsto & (x,y) = (2r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$

Justifier que h *est une bijection de* Δ *sur* D.

Solutions

résolution 1 • Il s'agit de montrer que pour

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists ! \, (u,v) \in \mathbb{R}^2, h(u,v) = (x,y)$$

Pour cela, on va se fixer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et montrer que l'équation* $h(u,v) = (x,y)$ *possède une seule solution, c'est à dire que le système* $\begin{cases} x &= u + v^2 \\ y &= v \end{cases}$ *possède un unique couple* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ *solution.*

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé.
  On s'intéresse au système
  $$\begin{cases} x &= u + v^2 \\ y &= v \end{cases}$$
  On a bien sûr
  $$\begin{cases} x &= u + v^2 \\ y &= v \end{cases} \iff \begin{cases} u &= x - y^2 \\ v &= y \end{cases}$$
  On a bien prouvé que le système possède une et une seule solution.

- Conclusion: $\boxed{h \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$, et l'on a

$$\boxed{\begin{array}{rccc} h^{-1} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x - y^2, y) \end{array}}$$

résolution 2

- Il s'agit de montrer que pour

$$\forall (x,y) \in D, \exists\,!\,(u,v) \in \Delta, h(u,v) = (x,y)$$

Pour cela, on va se fixer $(x,y) \in D$ et montrer que l'équation $h(u,v) = (x,y)$ possède une seule solution, c'est à dire que le système $\begin{cases} x & = u^2 + v \\ y & = v \end{cases}$ *possède un unique couple $(u,v) \in \Delta$ solution.*

- Soit $(x,y) \in D$ fixé.
On s'intéresse au système

$$\begin{cases} x & = u^2 + v \\ y & = v \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} x & = u^2 + v \\ y & = v \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 & = x - y \\ v & = y \end{cases}$$

Comme $(x,y) \in D$, on a $x - y \geqslant 0$; et comme $(u,v) \in \Delta$, on a $u \in \mathbb{R}^+$.
Ainsi on a les équivalences

$$\begin{cases} x & = u^2 + v \\ y & = v \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 & = x - y \\ v & = y \end{cases} \iff \begin{cases} u & = \sqrt{x - y} \\ v & = y \end{cases}$$

On a bien prouvé que le système possède une et une seule solution.

- Conclusion: $\boxed{h \text{ réalise une bijection de } \Delta \text{ sur } D}$, et l'on a

$$\boxed{\begin{array}{llll} h^{-1}: & D & \longrightarrow & \Delta \\ & (x,y) & \longmapsto & (\sqrt{x-y},y) \end{array}}$$

résolution 3

- Il s'agit de montrer que pour

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists\,!\,(u,v) \in \mathbb{R}^2, h(u,v) = (x,y)$$

Pour cela, on va se fixer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et montrer que l'équation* $h(u,v) = (x,y)$ *possède une seule solution, c'est à dire que le système* $\begin{cases} x &= u^3 + v^3 \\ y &= u^3 - v^3 \end{cases}$ *possède un unique couple* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ *solution.*

- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé.
  On s'intéresse au système

$$\begin{cases} x &= u^3 + v^3 \\ y &= u^3 - v^3 \end{cases}$$

Par demi-somme et demi-différence, on a

$$\begin{cases} x &= u^3 + v^3 \\ y &= u^3 - v^3 \end{cases} \iff \begin{cases} u^3 &= \dfrac{x+y}{2} \\ v^3 &= \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$$

Or on sait que

la fonction $t \mapsto t^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de fonction réciproque $\sqrt[3]{\ }$.

ce qui nous permet d'affirmer que

$$\begin{cases} x &= u^3 + v^3 \\ y &= u^3 - v^3 \end{cases} \iff \begin{cases} u^3 &= \dfrac{x+y}{2} \\ v^3 &= \dfrac{x-y}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u &= \sqrt[3]{\dfrac{x+y}{2}} \\ v &= \sqrt[3]{\dfrac{x-y}{2}} \end{cases}$$

On a bien prouvé que le système possède une et une seule solution.

- Conclusion: $\boxed{h \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$, et l'on a

$$\boxed{\begin{array}{rccc} h^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(\sqrt[3]{\dfrac{x+y}{2}}, \sqrt[3]{\dfrac{x-y}{2}}\right) \end{array}}$$

résolution 4 • Il s'agit de montrer que pour

$$\forall (x,y) \in D, \exists!\,(u,v) \in \Delta, h(u,v) = (x,y)$$

Pour cela, on va se fixer $(x,y) \in D$ et montrer que l'équation $h(u,v) = (x,y)$ possède une seule solution, c'est à dire que le système $\begin{cases} x &= u^2+v^2 \\ y &= u^2-v^2 \end{cases}$ possède un unique couple $(u,v) \in \Delta$ solution.

- Soit $(x,y) \in D$ fixé.
  On s'intéresse au système
  $$\begin{cases} x &= u^2+v^2 \\ y &= u^2-v^2 \end{cases}$$
  Par demi-somme et demi-différence, on a
  $$\begin{cases} x &= u^2+v^2 \\ y &= u^2-v^2 \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 &= \dfrac{x+y}{2} \\ v^2 &= \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$$
  Comme $(x,y) \in D$ on a $x > y$ et $x > -y$, c'est à dire $x - y > 0$ et $x + y > 0$.
  Comme $(u,v) \in \Delta$ on a $u > 0$ et $v > 0$
  (On sait que **la fonction $t \mapsto t^2$ est une bijection de** $]0,+\infty[$ **sur** $]0,+\infty[$**, de fonction réciproque** $\sqrt{.}$).
  On a donc les équivalences
  $$\begin{cases} x &= u^2+v^2 \\ y &= u^2-v^2 \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 &= \dfrac{x+y}{2} \\ v^2 &= \dfrac{x-y}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u &= \sqrt{\dfrac{x+y}{2}} \\ v &= \sqrt{\dfrac{x-y}{2}} \end{cases}$$
  On a bien prouvé que le système possède une et une seule solution.

- Conclusion: $\boxed{h \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$, et l'on a

$$\boxed{\begin{array}{llll} h^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(\sqrt{\dfrac{x+y}{2}},\sqrt{\dfrac{x-y}{2}}\right) \end{array}}$$

résolution 5 • Il s'agit de montrer que pour

$$\forall (x,y) \in D, \exists !\, (r,\theta) \in \Delta, h(r,\theta) = (x,y)$$

Pour cela, on va se fixer $(x,y) \in D$ *et montrer que l'équation* $h(r,\theta) = (x,y)$ *possède une seule solution, c'est à dire que le système* $\begin{cases} x &= 2r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$ *possède un unique couple* $(u,v) \in \Delta$ *solution.*

Pour se faire, nous allons procéder par Analyse-Synthèse

- $\boxed{\text{Partie Analyse}}$.
  Soit $(x,y) \in D$.
  On suppose qu'il existe $(r,\theta) \in \Delta$ tel que $\begin{cases} x &= 2r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$
  - On a alors $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = r^2$
    Comme $(x,y) \neq 0$ et que r soit être positif, on a $r = \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + y^2} > 0$
  - Pour ce choix de r, on a
    $$\left(\frac{x}{2r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2/4 + y^2}{r^2} = 1$$
    On peut donc affirmer qu'il existe un unique $\theta \in [0,2\pi[$ tel que
  - On a ainsi $\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{x}{2\sqrt{\dfrac{x^2}{4} + y^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{\sqrt{\dfrac{x^2}{4} + y^2}} \end{cases}$