trigonométrie

exercice 1 (*)

Résoudre l'équation $\cos(x) = \sin(3x)$

exercice 2

Résoudre l'équation $\sin(x) = \cos(4x)$

exercice 3 (*)

Ecrire $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$ *sous la forme* $K.\sin(\omega x + \varphi)$

exercice 4 (*)

Linéariser $\sin^2(x).\cos^2(x)$

exercice 5 (*)

Linéariser $\sin^3(x).\cos(2x)$

exercice 6

Linéariser $\sin^4 x$

exercice 7 (*)

Linéariser $\cos^4 x$

Solutions

résolution 1

– L'idée consiste à se ramener à une équation équivalente du type $\cos(x) = \cos(y)$ ou $\sin(x) = \sin(y)$

– On a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned}\cos(x) = \sin(3x) &\Longleftrightarrow \cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - 3x)\\ &\Longleftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2} - 3x\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv 3x - \frac{\pi}{2}\,[2\pi]\\ &\Longleftrightarrow 4x \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]\\ &\Longleftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{8}\,\left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{4}\,[\pi]\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{résolution 2}}$

résolution 3 On a $1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 = 2^2$

On écrit donc

$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right)$$

Comme $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et que $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) &= 2\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right)\\ &= 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos(x) + \cos\frac{\pi}{6}\sin(x)\right)\\ &= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

résolution 4 Ici le moyen le plus rapide est de ne pas passer en complexe mais d'utiliser les formules ci-dessous valables pour tout a réel

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \qquad \text{et } \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sin^2(x).\cos^2(x) &= (\sin(x).\cos(x))^2 \\
&= \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\sin^2(2x) \\
&= \frac{1}{4}.\frac{1-\cos(4x)}{2}
\end{aligned}$$

Au final on trouve que

$$\boxed{\sin^2(x).\cos^2(x) = \frac{1}{8} - \frac{\cos(4x)}{8}}$$

résolution 5

– Notons $X = e^{ix}$ et $\overline{X} = e^{-ix} = \dfrac{1}{X}$

– On a $\boxed{\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \dfrac{X - \overline{X}}{2i}}$ et $\boxed{\cos(2x) = \dfrac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} = \dfrac{X^2 + \overline{X}^2}{2}}$

– Le binôme de Newton donne

$$\sin^3(x) = \left(\frac{X - \overline{X}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}(X^3 - 3X^2\overline{X} + 3X\overline{X}^2 - \overline{X}^3) = \frac{-1}{8i}(X^3 - 3X + 3\overline{X} - \overline{X}^3)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sin^3(x).\cos(2x) &= \frac{-1}{16i}(X^3 - 3X + 3\overline{X} - \overline{X}^3)(X^2 + \overline{X}^2) \\
&= \frac{-1}{16i}(X^5 - 3X^3 + 3X - \overline{X} - \overline{X}^5 + 3\overline{X}^3 - 3\overline{X} + X) \\
&= \frac{-1}{16i}(X^5 - 3X^3 + 4X - \overline{X}^5 + 3\overline{X}^3 - 4\overline{X}) \\
&= \frac{-1}{8}\left[\frac{X^5 - \overline{X}^5}{2i} - 3\frac{X^3 - \overline{X}^3}{2i} + 4\frac{X - \overline{X}}{2i}\right] \\
&= \frac{-1}{8}(\sin(5x) - 3\sin(3x) + 4\sin(x)) \\
&= -\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{3}{8}\sin(3x) - \frac{1}{8}\sin(5x)
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{résolution 6}}$

résolution 7 – Notons $X = e^{ix}$ et $\overline{X} = e^{-ix} = \dfrac{1}{X}$ (il est très utile de noter que $X.\overline{X} = 1$)

– On a $\boxed{\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \dfrac{X + \overline{X}}{2}}$

– La formule du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left(\frac{X + \overline{X}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{2^4}(X + \overline{X})^4 \\
&= \frac{1}{2^4}(X^4 + 4X^3\overline{X} + 6X^2\overline{X}^2 + 4X\overline{X}^3 + \overline{X}^4) \\
&= \frac{1}{2^4}(X^4 + 4X^2 + 6 + 4\overline{X}^2 + \overline{X}^4) \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{X^4 + \overline{X}^4}{2} + 4.\frac{X^2 + \overline{X}^2}{2}\right] + \frac{3}{8} \\
&= \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x)) + \frac{3}{8} \\
&= \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$