systèmes linéaires

exercice 1 (*)

Résoudre le système linéaire $\begin{cases} -x+2y+3z &= 2 \\ 4x+5y+6z &= 0 \\ 7x+8y+9z &= 0 \end{cases}$

exercice 2 (*)

Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

exercice 3 (*)

Déterminer la matrice échelonnée réduite par ligne de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

exercice 4 (*)

Résoudre le système $\begin{cases} 3x+2z &= 0 \\ 3y+z+3t &= 0 \\ x+y+z+t &= 0 \\ 2x-y+z-t &= 0 \end{cases}$

exercice 5 (*)

Déterminer la matrice échelonnée réduite par ligne de $\begin{pmatrix} -5 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

exercice 6

Résoudre le système linéaire $\begin{cases} x+y+2z &= 5 \\ x-y-z &= 1 \\ x+z &= 3 \end{cases}$

exercice 7 (*)

Résoudre le système $\begin{cases} 3x-y+2z &= a \\ -x+2y-3z &= b \\ x+2y+z &= c \end{cases}$

exercice 8 (*)

Résoudre le système $\begin{cases} x+3y+2z &= 0 \\ 2x-y+3z &= 0 \\ 3x-5y+4z &= 0 \\ x+17y+4z &= 0 \end{cases}$

exercice 9 (*)

Déterminer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

exercice 10

Résoudre le système $\begin{cases} 2x-y+3z &= 1 \\ -4x+2y+z &= 3 \\ -2x+y+4z &= 4 \\ 10x-5y-6z &= -10 \end{cases}$

exercice 11 (*)

Déterminer la matrice échelonnée réduite de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

exercice 12 (*)

Résoudre le système $\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x-y+az &= 4 \\ -x+2y+z &= 4a \end{cases}$ *selon les valeurs du paramètre* a

exercice 13 (*)

Résoudre le système $\begin{cases} 3x-y-2z &= a \\ -x+3y-z &= b \\ -2x-2y+3z &= c \\ x-3y+z &= d \end{cases}$ *en fonction des paramètres* a, b, c *et* d

exercice 14 (*)

Résoudre le système $\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ 2x-y-z+3t &= 0 \\ x-2y+2z-t &= 1 \\ 2x+2y-2z+5t &= -1 \end{cases}$

exercice 15 (*)

Résoudre le système $\begin{cases} ax - by + t & = a \\ bx + ay + z & = b \\ y + az - bt & = a \\ x + bz + at & = b \end{cases}$ *selon les paramètres* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

exercice 16 (*)

Résoudre le système $\begin{cases} 3x - y + z + 7t & = 0 \\ 9x - 3y - 7z + t & = 0 \\ -4z - 8t & = 0 \\ -2z - 4t & = 0 \end{cases}$

exercice 17 (*)

Résoudre le système $\begin{cases} x_1 + x_2 & = a_1 \\ x_2 + x_3 & = a_2 \\ x_3 + x_1 & = a_3 \end{cases}$ *suivant les paramètres* $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{K}^3$

exercice 18 (*)

Résoudre le système $\begin{cases} x_1 + x_2 & = a_1 \\ x_2 + x_3 & = a_2 \\ x_3 + x_4 & = a_3 \\ x_4 + x_1 & = a_4 \end{cases}$ *suivant les paramètres* $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{K}^4$

exercice 19

Calculer A^{-1} *lorsque* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

exercice 20

Calculer A^{-1} *pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Solutions

résolution 1 – On écrit la matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

– On effectue les transvections $L_2 \longleftarrow L_2 + 4L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + 7L_1$, et on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 13 & 18 & 8 \\ 0 & 22 & 30 & 14 \end{array}\right)$$

– On effectue la dilatation $L_2 \longleftarrow \dfrac{1}{13}L_2$ puis la transvection $L_3 \longleftarrow L_3 - 22L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{18}{13} & \frac{8}{13} \\ 0 & 22 & 30 & 14 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{18}{13} & \frac{8}{13} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{13} & \frac{6}{13} \end{array}\right)$$

– On effectue la dilatation $L_3 \longleftarrow \dfrac{-13}{6}L_3$ puis la transvection $L_2 \longleftarrow L_2 - \dfrac{18}{13}L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{18}{13} & \frac{8}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

– On termine par la transformation $L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2 - 3L_3$ puis la dilatation $L_1 \longleftarrow -L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

– Il y a comme unique solution $(-1,2,-1)$

résolution 2

– On effectue la méthode du pivot pour compter le nombre de pivots

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

– Les transvections $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$ donnent

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

– On procède à l'échange $L_2 \longleftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

– Puis on effectue les transvections $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

– Et enfin $L_4 \longleftarrow L_4 - \dfrac{2}{11}L_3$ aboutit à

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{11} & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– Le rang est donc de 3

résolution 3 – On commence à retirer à chaque ligne la première

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

– On effectue la dilatation $L_2 \longleftarrow \dfrac{-1}{2} L_2$ puis les transvections $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

– On effectue la dilatation $L_3 \longleftarrow -L_3$ puis la transvection $L_4 \longleftarrow L_4 - 8L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– On effectue la transvection $L_2 \longleftarrow L_2 + 3L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– Et on termine par la transformation $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2 + 3L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

résolution 4

- On écrit la matrice du système et on échange de suite $L_1 \longleftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- On effectue les transvections $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

- On effectue les transvections $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$ et $L_4 \longleftarrow L_4 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La dilatation $L_2 \longleftarrow \dfrac{1}{3} L_2$ donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Enfin la transvection $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$ aboutit à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Il y a deux inconnues principales (x et y) et deux secondaires (z et t)

  La solution générale est

$$x = \frac{-2}{3} z \qquad y = \frac{-1}{3} z - t \qquad \text{avec } (z,t) \in \mathbb{R}^2$$

résolution 5

– On effectue la dilatation $L_1 \longleftarrow \dfrac{-1}{5} L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 4 & 5 & 8 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

– puis les transvections $L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + 5L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{21}{5} & \frac{28}{5} \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

– On effectue la dilatation $L_2 \longleftarrow \dfrac{5}{21} L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

– puis la transvection $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– enfin on termine par la transvection $L_1 \longleftarrow L_1 - \dfrac{1}{5} L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

résolution 7 – On peut utiliser un pivot de Gauss sur la matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & a \\ -1 & 2 & -3 & b \\ 1 & 2 & 1 & c \end{array}\right)$$

– On échange la première et dernière ligne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & c \\ -1 & 2 & -3 & b \\ 3 & -1 & 2 & a \end{array}\right)$$

– Puis on effectue les transvections $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & c \\ 0 & 4 & -2 & c+b \\ 0 & -7 & -1 & a-3c \end{array}\right)$$

– La dilatation $L_2 \longleftarrow \dfrac{1}{4}L_2$ **puis** la transvection $L_3 \longleftarrow L_3 + 7L_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & c \\ 0 & 1 & \dfrac{-1}{2} & \dfrac{c+b}{4} \\ 0 & 0 & \dfrac{-9}{2} & \dfrac{4a+7b-5c}{4} \end{array}\right)$$

– La dilatation $L_3 \longleftarrow \dfrac{-2}{9}L_3$ **puis** la transvection $L_2 \longleftarrow L_2 + \dfrac{1}{2}L_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-2a+b+7c}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-4a-7b+5c}{18} \end{array}\right)$$

– Enfin la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$ aboutit à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{8a+5b-c}{18} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-2a+b+7c}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-4a-7b+5c}{18} \end{array}\right)$$

résolution 8

- On écrit la matrice associée au système, et on utilise la méthode du pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{pmatrix}$$

- Les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$ donnent

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -14 & -2 \\ 0 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

- Puis les opérations $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$ et $L_4 \longleftarrow L_4 + 2L_2$ donnent

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- En revenant au système cela donne

$$\begin{cases} x + 3y + 2z & = 0 \\ -7y - z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = -3y - 2z \\ z & = -7y \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 11y \\ z & = -7y \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\left\{ \begin{pmatrix} 11y \\ y \\ -7y \end{pmatrix} |y \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix})$

résolution 9 – On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– On effectue la transvection $L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1$ puis la dilatation $L_2 \longleftarrow \dfrac{1}{9}L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 20 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{20}{9} & \dfrac{-4}{9} & \dfrac{1}{9} & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– On effectue la transvection $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$ puis la dilatation $L_3 \longleftarrow \dfrac{-9}{4}L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{20}{9} & \dfrac{-4}{9} & \dfrac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-4}{9} & \dfrac{8}{9} & \dfrac{-2}{9} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{20}{9} & \dfrac{-4}{9} & \dfrac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{-9}{4} \end{pmatrix}$$

– On effectue la transvection $L_2 \longleftarrow L_2 - \dfrac{20}{9}L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{-9}{4} \end{pmatrix}$$

– On effectue la transformation $L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 + 3L_3$ et on aboutit à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{-7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{-9}{4} \end{pmatrix}$$

– On en déduit que $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible et que son inverse est $\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{-7}{4} \\ 4 & -1 & 5 \\ -2 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{-9}{4} \end{pmatrix}$

résolution 11 – Les transvections $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1,\quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$ donnent

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

– On procède à l'échange $L_2 \longleftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

– Puis on effectue les transvections $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

– On effectue la dilatation $L_3 \longleftarrow \dfrac{1}{11} L_3$ puis la transvection $L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– La transvection $L_1 \longleftarrow L_1 + L_2$ donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– Et enfin on aboutit à la m.e.r.p.l en effectuant $L_1 \longleftarrow L_1 + L_3$ et $L_2 \longleftarrow L_2 + 4L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

résolution 12 – On écrit la matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 4a \end{array}\right)$$

– Les transvections $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2+a & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2+4a \end{array}\right)$$

– Puis la transvection $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2+a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2+4a \end{array}\right)$$

La dernière ligne donne **la condition de compatibilité du système**: $\boxed{a = 2 + 4a \text{ càd } a = 0}$

Dans la suite on suppose $a \neq 0$

– On effectue la dilatation $L_3 \longleftarrow \dfrac{1}{a}L_3$ puis la transvection $L_2 \longleftarrow L_2 + (2-a)L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2+a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2+4a}{a} \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & \dfrac{(2-a)(2+4a)}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2+4a}{a} \end{array}\right)$$

– La dilatation $L_2 \longleftarrow \dfrac{-1}{3}L_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{(a-2)(2+4a)}{3a} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2+4a}{a} \end{array}\right)$$

– La transformation $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2 - L_3$ aboutit à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\dfrac{1+2a^2}{3a} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{(a-2)(2+4a)}{3a} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2+4a}{a} \end{array}\right)$$

– Conclusion: Le système est compatible ssi $a \neq 0$ et dans ce cas il y a une unique solution

$$x = -2\frac{1+2a^2}{3a} \quad y = \frac{(a-2)(2+4a)}{3a} \quad z = \frac{2+4a}{a}$$

résolution 13 – On écrit la matrice augmentée du système, et on échange $L_1 \longleftrightarrow L_4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & a \\ -1 & 3 & -1 & b \\ -2 & -2 & 3 & c \\ 1 & -3 & 1 & d \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & d \\ -1 & 3 & -1 & b \\ -2 & -2 & 3 & c \\ 3 & -1 & -2 & a \end{array}\right)$$

– On effectue les transvections $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$, $\quad L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & b+d \\ 0 & -8 & 5 & c+2d \\ 0 & 8 & -5 & a-3d \end{array}\right)$$

– On effectue la transvection $L_3 \longleftarrow L_3 + L_4$ puis l'échange $L_2 \longleftrightarrow L_4$ cela donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & b+d \\ 0 & 0 & 0 & a+c-d \\ 0 & 8 & -5 & a-3d \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & d \\ 0 & 8 & -5 & a-3d \\ 0 & 0 & 0 & a+c-d \\ 0 & 0 & 0 & b+d \end{array}\right)$$

Cela nous donne comme condition de compatibilité: $\boxed{a+c-d=0 \text{ et } b+d=0}$

Dans la suite on suppose ces conditions vérifiées

– On effectue la dilatation $L_2 \longleftarrow \dfrac{1}{8}L_2$ puis la transvection $L_1 \longleftarrow L_1 + 3L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & d \\ 0 & 1 & \dfrac{-5}{8} & \dfrac{a-3d}{8} \\ 0 & 0 & 0 & a+c-d \\ 0 & 0 & 0 & b+d \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \dfrac{-7}{8} & \dfrac{3a-d}{8} \\ 0 & 1 & \dfrac{-5}{8} & \dfrac{a-3d}{8} \\ 0 & 0 & 0 & a+c-d \\ 0 & 0 & 0 & b+d \end{array}\right)$$

Il y a deux inconnues principales (x et y) et une secondaire z.

– Conclusion:

i) si $a+c-d \neq 0$ ou $b+d \neq 0$ alors le système est incompatible

ii) si $a+c-d=0$ et $b+d=0$ alors le système possède une infinité de solutions

$$x = \frac{3a-d}{8} + \frac{7}{8}z \qquad y = \frac{a-3d}{8} + \frac{5}{8}z \qquad \text{avec } z \in \mathbb{K}$$

résolution 14

– On écrit la matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

– On commence par effectuer les transvections $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1,\quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

– On effectue la transvection $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$ puis la dilatation $L_2 \longleftarrow \dfrac{-1}{3}L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & -1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

– La transvection $L_4 \longleftarrow L_4 + L_3$ puis la dilatation $L_3 \longleftarrow \dfrac{1}{4}L_3$ donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dfrac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-3}{4} & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

– La transvection $L_2 \longleftarrow L_2 - L_3$ puis la transformation $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2 - L_3$ aboutit à

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{5}{12} & \dfrac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-3}{4} & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{5}{12} & \dfrac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-3}{4} & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a 3 inconnues principales (x, y et z) et une secondaire (t), ce qui donne comme solution

$$x = -\frac{4}{3}t \qquad y = -\frac{5}{12}t - \frac{1}{4} \qquad z = \frac{3}{4}t + \frac{1}{4} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{K}$$

résolution 15 .

- On écrit la matrice augmentée du système et on permute de suite $L_1 \longleftrightarrow L_4$ et $L_2 \longleftrightarrow L_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & -b & 0 & 1 & a \\ b & a & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a & -b & a \\ 1 & 0 & b & a & b \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & b & a & b \\ 0 & 1 & a & -b & a \\ b & a & 1 & 0 & b \\ a & -b & 0 & 1 & a \end{array}\right)$$

- On effectue les transvections $L_3 \longleftarrow L_3 - bL_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - aL_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & b & a & b \\ 0 & 1 & a & -b & a \\ 0 & a & 1-b^2 & -ab & b(1-b) \\ 0 & -b & -ab & 1-a^2 & a(1-b) \end{array}\right)$$

- Puis les transvections $L_3 \longleftarrow L_3 - aL_2$ et $L_4 \longleftarrow L_4 + bL_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & b & a & b \\ 0 & 1 & a & -b & a \\ 0 & 0 & 1-a^2-b^2 & 0 & b-b^2-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2-b^2 & a \end{array}\right)$$

et à ce moment on entame une discussion:

1. si $a^2+b^2=1$ et $(a \neq 0$ ou $b-b^2-a^2 \neq 0)$ alors le système est incompatible

2. si $a^2+b^2=1$ et $(a=0$ et $b-b^2-a^2=0)$ alors la matrice devient

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & b & a & b \\ 0 & 1 & a & -b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a donc 2 inconnues principales (x et y) et 2 secondaires (z et t). La solution s'écrit

$$x = b - by - at \qquad y = a - az + bt \qquad \text{avec } (z,t) \in \mathbb{R}^2$$

3. si $a^2+b^2 \neq 1$:
   - on effectue les dilatations $L_3 \longleftarrow \dfrac{1}{1-a^2-b^2}L_3$ et $L_4 \longleftarrow \dfrac{1}{1-a^2-b^2}L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & b & a & b \\ 0 & 1 & a & -b & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{b-b^2-a^2}{1-a^2-b^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{a}{1-a^2-b^2} \end{array}\right)$$

   - puis on effectue la transformation $L_2 \longleftarrow L_2 - aL_3 + bL_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & b & a & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{a}{1-a^2-b^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{b-b^2-a^2}{1-a^2-b^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{a}{1-a^2-b^2} \end{array}\right)$$

– enfin on termine par la transformation $L_1 \longleftarrow L_1 - bL_3 - aL_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{b-b^2-a^2}{1-a^2-b^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{a}{1-a^2-b^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{b-b^2-a^2}{1-a^2-b^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{a}{1-a^2-b^2} \end{array}\right)$$

On trouve donc qu'il y a une unique solution

$$(x,y,z,t) = \left(\frac{b-b^2-a^2}{1-a^2-b^2}, \frac{a}{1-a^2-b^2}, \frac{b-b^2-a^2}{1-a^2-b^2}, \frac{a}{1-a^2-b^2}\right)$$

résolution 16

– La matrice du système est

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 9 & -3 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

– Les transvections $L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 + \dfrac{1}{2}L_3$ donnent

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– La dilatation $L_2 \longleftarrow \dfrac{-1}{10}L_2$ puis la transvection $L_3 \longleftarrow L_3 + 4L_2$ donne

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– Enfin la transvection $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$ aboutit à

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui correspond au système

$$\begin{cases} 3x - y + 5t & = 0 \\ z + 2t & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y & = 3x + 5t \\ z & = -2t \end{cases}$$

– Le système a donc pour ensemble de solutions

$$\mathcal{S} = \{(x,3x+5t,-2t,t) | (x,t) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{x(1,3,0,0) + t(0,5,-2,1) | (x,t) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \text{vect}((1,3,0,0),(0,5,-2,1))$$

résolution 17 – On écrit la matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 \end{array}\right)$$

– La transvection $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 2 & a_3 + a_2 - a_1 \end{array}\right)$$

– La transvection $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ puis la dilatation $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & -1 & 1 & a_3 - a_1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a_3 + a_2 - a_1}{2} \end{array}\right)$$

– La transvection $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{a_1 + a_2 - a_3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a_3 + a_2 - a_1}{2} \end{array}\right)$$

– Enfin la transvection $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ aboutit à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{a_1 - a_2 + a_3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{a_1 + a_2 - a_3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{a_3 + a_2 - a_1}{2} \end{array}\right)$$

– On trouve que le système possède une unique solution

$$(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{a_1 - a_2 + a_3}{2},\frac{a_1 + a_2 - a_3}{2},\frac{a_3 + a_2 - a_1}{2}\right)$$

$\boxed{\textbf{résolution 18}}$ – On écrit la matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right)$$

– Les transvections successives $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ donnent

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_4 - a_1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_4 - a_1 + a_2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 - a_1 + a_2 - a_3 \end{array}\right)$$

– **Conclusion partielle:**

i) Le système est de rang 3 : il y a 3 inconnues principales (x_1, x_2 et x_3) et une secondaire x_4.

ii) Le système est compatible ssi $a_4 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$

– La transvection $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & a_2 - a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 - a_1 + a_2 - a_3 \end{array}\right)$$

– Puis la transvection $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ aboutit à

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a_1 - a_2 + a_3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & a_2 - a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 - a_1 + a_2 - a_3 \end{array}\right)$$

– Conclusion:
le système est compatible ssi $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0$, et dans ce cas la solution est

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (a_1 - a_2 + a_3 - x_4, a_2 - a_3 + x_4, a_3 - x_4, x_4) \text{ avec } x_4 \in \mathbb{K} \\ &= (a_1 - a_2 + a_3, a_2 - a_3, a_3, 0) + x_4(-1,1,-1,1) \text{ avec } x_4 \in \mathbb{K}\end{aligned}$$

résolution 19

résolution 20 – On écrit la matrice augmentée du système $AX = Y$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & y_1 \\ 3 & 1 & 2 & y_2 \\ 2 & 3 & 1 & y_3 \end{pmatrix}$$

– On effectue : $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et cela donne :

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & y_1 \\ 0 & -5 & -7 & y_2 - 3y_1 \\ 0 & -1 & -5 & y_3 - 2y_1 \end{pmatrix}$$

– puis $L_2 \leftrightarrow L_3$, $L_2 \leftarrow -L_2$,$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$, $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ et cela donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -3y_1 + 2y_3 \\ 0 & 1 & 5 & 2y_1 - y_3 \\ 0 & 0 & 18 & 7y_1 - 5y_3 + y_2 \end{pmatrix}$$

– Enfin $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{18}L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + 7L_3$ et cela donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{18}(-5y_1 + 7y_2 + y_3) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{18}(y_1 - 5y_2 + 7y_3) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{18}(7y_1 + y_2 - 5y_3) \end{pmatrix}$$

– Conclusion: A est inversible et $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}}$

remarque: ici il y avait plus simple… en remarquant que $A = I_3 + 2J + 3J^2$ et que $J^3 = I$