

Sommes de Riemann (1A)

exercice 1 (*)

$$\left| \text{Déterminer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + 2nk + n^2} \right.$$

exercice 2 (*)

$$\left| \text{Déterminer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \right.$$

exercice 3 (*)**

$$\left| \text{Déterminer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n \cdot n!} \right)^{1/n} \right.$$

exercice 4

|

Solutions

résolution 1

• Posons pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + nk + n^2}$

• Pour $n \geq 1$ on a

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2\frac{k}{n} + 1}$$

• Considérons
$$\boxed{\begin{array}{l} f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{1}{t^2 + 2t + 1} \end{array}}$$

Notons $a = 0$ et $b = 1$

Comme f est une fonction continue sur le segment $[a,b] = [0,1]$, on sait par théorème sur les sommes de Riemann que

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(t) dt$$

• On a

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \left[\frac{-1}{1+t} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

• On a prouvé que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + 2nk + n^2} = \frac{1}{2}}$$

résolution 2

• Posons pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right)$

• Considérons
$$\begin{array}{l} f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \sin(t) \end{array}$$

Notons $a = 0$ et $b = 1$

Comme f est une fonction continue sur le segment $[a,b] = [0,1]$, on sait par théorème sur les sommes de Riemann que

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(t) dt$$

• On a

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^1 = 1 - \cos(1)$$

• On a prouvé que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) = 1 - \cos(1)$$

résolution 3

- Notons pour tout $n \geq 1$, $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n \cdot n!}\right)^{1/n}$ et $v_n = \ln u_n$

- Commençons par remarquer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\frac{(2n)!}{n!} = (n+1)(n+2)(n+3)\dots(2n) = \prod_{k=1}^n (k+n)$$

et donc

$$\frac{(2n)!}{n^n \cdot n!} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+n)}{n^n} = \prod_{k=1}^n \frac{k+n}{n} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} + 1\right)$$

- Pour $n \geq 1$, on a ainsi

$$v_n = \frac{1}{n} \ln \prod_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} + 1\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{n} + 1\right)$$

- Considérons $\boxed{\begin{array}{l} f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \ln(t+1) \end{array}}$

Notons $a = 0$ et $b = 1$

Comme f est une fonction continue sur le segment $[a,b] = [0,1]$, on sait par théorème sur les sommes de Riemann que

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(t) dt$$

- On réalise une ipp en posant $u(t) = \ln(t+1)$ et $v'(t) = 1$.

(on aura alors $u'(t) = \frac{1}{t+1}$ et on choisit (astucieusement!) $v(t) = t+1$)

$$\int_0^1 \ln(t+1) dt = [(t+1) \ln(t+1)]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot dt = 2 \ln 2 - 1$$

- Pour tout $n \geq 1$ on a $u_n = e^{v_n}$

Comme la fonction \exp est continue sur \mathbb{R} (donc en particulier en $2 \ln 2 - 1$), on en déduit que

$$\lim u_n = \lim e^{v_n} = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$$

- On a prouvé que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n \cdot n!}\right)^{1/n} = \frac{4}{e}}$$

résolution 4