Primitives et intégrales (1A)

exercice 1 (**)

Calculer une primitive de $f : t \mapsto t^2.\sin(2t)$ *sur* $\mathbb{R}$

exercice 2 (**)

Calculer une primitive de $f : t \mapsto \cos^4(t)$ *sur* $\mathbb{R}$

exercice 3 (*)

Donner une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{(t-1)(t-2)(t-3)}$ *en précisant l'intervalle de validité*

exercice 4 (**)

Calculer une primitive de $f : t \mapsto \cos^3(t)$ *sur* $\mathbb{R}$

exercice 5 (*)

Calculer $I = \int_0^1 \left(\dfrac{t+2}{t+1}\right)^3$ *en posant* $u = t+1$

exercice 6 (*)

Calculer $I = \int_0^{\pi/4} \dfrac{\cos x(1+\tan^2 x)}{\sin x + \cos x}dx$ *en posant* $u = \tan x$

exercice 7 (**)

Calculer $I = \int_0^{\pi} \sin^5 x.\cos^2 x dx$ *en posant* $u = \cos x$

exercice 8 (*)

Calculer $I = \int_0^{\pi} \dfrac{\cos^{21} x}{1+\sin^{13} x}dx$ *en posant* $u = \sin x$

exercice 9 (*)

Calculer $I = \int_0^1 \dfrac{e^t}{e^{-t}+1}dt$ *en posant* $u = e^t$

exercice 10 (**)

Calculer $I = \int_{\pi/2}^{\pi} \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$ *en posant* $u = \cos x$

exercice 11 (**)

Calculer $I = \int_{-1/2}^{1/2} \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}.\arccos(t)}$

exercice 12 (**)

Calculer $I = \int_0^1 \dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x\, dx$

exercice 13 (*)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}}$ *en précisant l'intervalle de validité*

exercice 14 (**)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ *en précisant l'intervalle de validité*

exercice 15 (**)

Calculer $I = \int_0^{1/2} \arcsin t \, dt$

exercice 16 (*)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ *(en posant* $t = \sqrt{x}$*) en précisant l'intervalle de validité*

exercice 17 (*)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto e^x . \cos x$ *en précisant l'intervalle de validité*

exercice 18 (*)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$ *sur l'intervalle* $]-1,+1[$

exercice 19 (**)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \cos^8 x . \sin^3 x$ *en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser* $t = \cos x$*)*

exercice 20 (*)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ *en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser* $t = \ln x$*)*

exercice 21 (**)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}$ *en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser* $x = 2t+2$*)*

exercice 22 (*)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}$ *en précisant l'intervalle de validité*

exercice 23 (**)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin x}$ *sur l'intervalle* $]-\pi,+\pi[$ *(on pourra poser* $t = \tan \dfrac{x}{2}$*)*

exercice 24 (**)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 4e^{-x}}$ *en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser* $t = e^x$*)*

exercice 25 (***)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto e^{-x}\ln(1 + e^x)$ *en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser* $t = e^x$*)*

exercice 26 (*)

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{2\ln x}{x(1 + \ln^4 x)}$ *en précisant l'intervalle de validité (on pourra poser* $t = \ln(x)$ *puis* $u = t^2$*)*

exercice 27

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{(1 + x)^2}$ *en précisant l'intervalle de validité .(On pourra réaliser une ipp puis une décomposition en éléments simples)*

exercice 28

Calculer la primitive suivante $\int \dfrac{\ln(x + 1)}{(x + 3)^3} dx$ *sur l'intervalle* $] - 1, +\infty[$

exercice 29

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \sin(\ln x)$ *en précisant l'intervalle de validité*

exercice 30

Calculer les primitive de $f : t \mapsto e^{-t}.t.\cos(2t)dt$

Solutions

résolution 1

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle possède une primitive sur cet intervalle, notons la F

- On va procéder à une double ipp.

  On commence par poser $u(t) = t^2$ et $v'(t) = \sin(2t)$
  (on aura donc $u'(t) = 2t$ et on choisira $v(t) = \dfrac{-\cos(2t)}{2}$)

$$F(t) = \int t^2.\sin(2t)dt = -t^2.\frac{\cos(2t)}{2} + \int t.\cos(2t)dt$$

- Puis on refait une ipp en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \cos(2t)$.
  (On aura donc $u'(t) = 1$ et on choisira $v(t) = \dfrac{\sin(2t)}{2}$).

  Ce qui donne:

$$F(t) = -t^2\frac{\cos(2t)}{2} + t.\frac{\sin(2t)}{t} - \int \frac{\sin(2t)}{2}dt = -t^2\frac{\cos(2t)}{2} + t.\frac{\sin(2t)}{t} + \frac{\cos(2t)}{4} + cste$$

- On trouve donc que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : t \mapsto -t^2\frac{\cos(2t)}{2} + t.\frac{\sin(2t)}{t} + \frac{\cos(2t)}{4} + cste}$$

résolution 2

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle possède une primitive sur cet intervalle.

- On commence par linéariser $f(t)$.
  Pour cela on utilise <u>les nombre complexes et la formule du binôme de Newton.</u>

$$\cos^4 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{4it}+4.e^{3it}.e^{-it}+6.e^{2it}.e^{-2it}+4.e^{it}.e^{-3it}+e^{-4it}\right)$$

  ce que l'on réordonne:

$$\cos^4 t = \frac{1}{16}\left[e^{4it}+e^{-4it}+4(e^{2it}+e^{-2it})+6\right] = \frac{1}{16}\left(2\cos(4t)+4\cos(2t)+6\right)$$

  On trouve donc que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{8}\cos(4t)+\frac{1}{2}\cos(2t)+\frac{3}{8}}$

- On trouve donc que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : t \mapsto \frac{1}{32}\sin(4t)+\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{3}{8}t+Cste}$$

résolution 3

- La fonction f est continue sur tout intervalle I ne contenant ni 1, ni 2 , ni 3.
  Et donc la fonction f possède une primitive sur ce type d'intervalle

- Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{2}.\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X-2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{X-3}$$

- Notons F une primitive de f sur I.
  On a donc pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \frac{dt}{(t-1)(t-2)(t-3)} \\ &= \int \frac{1}{2}.\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{t-3} dt \\ &= \frac{1}{2}\ln|t-1| - \ln|t-2| + \frac{1}{2}\ln|t-3| + Cste \end{aligned}$$

- On a ainsi prouvé que les primitives de f sur l'intervalle I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : t \mapsto \frac{1}{2}\ln|t-1| - \ln|t-2| + \frac{1}{2}\ln|t-3| + Cste}$$

- *remarque: les intervalles maximaux I sont* $]-\infty,1[$ *et* $]1,2[$ *et* $]2,3[$ *et* $]3,+\infty[$

résolution 4 • La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle possède une primitive sur cet intervalle.

- On pourrait bien sûr procéder comme pour le calcul précédent et effectuer une linéarisation...

- Mais ici, comme l'exposant est impair, on peut procéder différemment!

$$F(t) = \int \cos^3(t)dt = \int \cos(t).\cos^2(t)dt = \int \cos(t).(1-\sin^2(t))dt$$

  On effectue le changement de variable $u = \sin(t)$ et donc $du = \cos(t).dt$.

  Ce qui donne

$$\boxed{F(t) = \int (1-u^2)du = u - \frac{u^3}{3} + cste = \sin(t) - \frac{\sin^3(t)}{3} + cste}$$

- On trouve donc que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : t \mapsto \sin(t) - \frac{\sin^3(t)}{3} + cste}$$

résolution 5

- L'intégrale I est bien définie car la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{t+2}{t+1}\right)^3$ est continue sur le *segment* $[0,1]$

- En effectuant le changement de variable $u = t+1$ (et donc $du = dt$), on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \frac{(u+1)^3}{u^3} du \\
&= \int_1^2 \left(1 + \frac{3}{u} + \frac{3}{u^2} + \frac{1}{u^3}\right) du \\
&= \left[u + 3\ln|u| - \frac{3}{u} - \frac{1}{2u^2}\right]_1^2 \\
&= \frac{23}{8} + 3\ln 2
\end{aligned}$$

résolution 6 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos x(1+\tan^2 x)}{\sin x + \cos x}$ est continue sur le *segment* $[0,\pi/4]$,
(car c'est le quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas)

- En effectuant le changement de variable $u = \tan x$ (et donc $du = (1+\tan^2 x)dx$), on obtient
$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{(1+\tan^2 x)dx}{1+\tan x} = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = [\ln|1+u|]_0^1 = \ln 2$$

résolution 7 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $x \mapsto \sin^5 x.\cos^2 x$ est continue sur le *segment* $[0,\pi]$

- On commence par remarquer que

$$\forall x \in [0,\pi],\ \sin^5 x.\cos^2 x = \sin x.\sin^4 x.\cos^2 x = \sin x.(1-\cos^2 x)^2.\cos^2 x$$

- En effectuant le changement de variable $u = \cos x$ (et donc $du = -\sin x dx$) on obtient

$$I = \int_0^\pi \sin x.(1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x dx = -\int_1^{-1} (1-u^2)^2 u^2 du$$

En développant

$$I = \int_{-1}^{1} (u^2 - 2u^4 + u^6) du = \left[\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right]_{-1}^{+1} = \frac{16}{105}$$

résolution 8 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos^{21} x}{1+\sin^{13} x}$ est continue sur le *segment* $[0,\pi]$

- On commence par remarquer que

$$\forall x \in [0,\pi], \frac{\cos^{21} x}{1+\sin^{13} x} = \frac{\cos x . \cos^{20} x}{1+\sin^{13} x} = \frac{\cos x .(1-\sin^2 x)^{10}}{1+\sin^{13} x}$$

- En effectuant le changement de variable $u = \sin x$ (et donc $du = \cos x \, dx$),

  on obtient
$$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos x(1-\sin^2 x)^{10}}{1+\sin^{13} x} dx = \int_0^0 \frac{(1-u^2)^{10}}{1+u^{13}} = 0$$

  remarque: dans une intégrale non généralisée (ie intégrale de première année) le changement de variable n'est pas nécessairement bijectif!

résolution 9 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $t \mapsto \dfrac{e^t}{e^{-t}+1}$ est continue sur le *segment* [0,1]

•
En effectuant le changement de variable $u = e^t$ (et donc $du = e^t dt$),

on obtient

$$I = \int_1^e \frac{du}{\dfrac{1}{u}+1} = \int_1^e \frac{u.du}{u+1} = \int_1^e \frac{u+1-1}{u+1} du = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du$$

ainsi

$$I = [u - \ln|u+1|]_1^e = e - 1 + \ln(2) - \ln(1+e)$$

résolution 10 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}$ est continue sur le *segment* $[\pi/2,\pi]$

• En effectuant le changement de variable $u = \cos x$ (et donc $dx = \dfrac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$),

on obtient

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt{1-\cos x}} dx = \int_0^{-1} \frac{1-u^2}{\sqrt{1-u}} . \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_{-1}^{0} \sqrt{1+u}\, du = \left[\frac{2}{3}(1+u)^{3/2}\right]_{-1}^{0} = \frac{2}{3}$$

résolution 11 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}.\arccos(t)}$ est continue sur le *segment* $[-1/2,1/2]$

- On reconnait directement une forme $-\dfrac{u'}{u}$ on a donc

$$I = [-\ln \arccos t]_{-1/2}^{+1/2} = -\ln \frac{\pi}{3} + \ln \frac{2\pi}{3} = \ln 2$$

résolution 12 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$ est continue sur le *segment* [0,1]

- On commence par l'astuce classique

$$I = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\arctan x\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x = \int_0^1 \arctan(x)\,dx - \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$$

- La première intégrale(classique) se calcule par parties

$$\int_0^1 \arctan(x)\,dx = [x.\arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left[x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

- La seconde intégrale se calcule directement

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}(\arctan x)^2\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$$

- Au final

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{\ln 2}{2}$$

résolution 13

- La fonction f est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ donc
  - elle possède des primitives sur cet intervalle
  - et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.
  On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}dx$

- On effectue le changement de variable $u = 3 + x^2$ (et donc $du = 2xdx$). Cela donne

$$F(x) = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int \frac{(u)^{-1/2}}{2}du = u^{1/2} + Cste = \sqrt{3+x^2} + Cste$$

- On trouve donc que les prmitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \sqrt{3+x^2} + Cste}$$

résolution 14

- La fonction f est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ donc
  - elle possède des primitives sur cet intervalle
  - et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.
  On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \int \ln(1 + x^2)dx$

- Nous allons effectuer une intégration par parties en posant

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = \ln(1 + x^2) \quad ; \quad \text{on a alors } u'(x) = 1 \quad \text{et } v'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

D'où

$$F(x) = x.\ln(1 + x^2) - \int \frac{2x^2}{1 + x^2}dx = x.\ln(1 + x^2) - 2\int \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2}dx$$

c'est à dire

$$F(x) = x.\ln(1 + x^2) - 2\int (1 - \frac{1}{1 + x^2})dx = x.\ln(1 + x^2) - 2x + 2\arctan x + Cste$$

- On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto x.\ln(1 + x^2) - 2x + 2\arctan x + Cste}$$

résolution 15 • L'intégrale I est bien définie car la fonction $t \mapsto \arcsin t$ (càd la fonction arcsin) est continue sur le *segment* $[0{,}1/2]$

• Nous allons réaliser une intégration par parties en posant

$$u(t) = t \quad \text{et} \quad v(t) = \arcsin(t) \quad ; \text{ on a alors } u'(t) = 1 \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \arcsin t \, dt &= [t.\arcsin t]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{1}{2}.\frac{\pi}{6} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{1/2} \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{aligned}$$

résolution 16

- La fonction f est définie et continue sur $I =]0, +\infty[$ donc
  - elle possède des primitives sur cet intervalle
  - et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.
  On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \int \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} dx$
- On effectue le changement de variable $t = \sqrt{x}$ (on a donc $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$) et l'on obtient

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2dt}{1+t^2} = 2\arctan t + Cste = 2\arctan\sqrt{x} + Cste$$

- On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto 2\arctan\sqrt{x} + Cste}$$

résolution 17

- La fonction f est définie et continue sur $I = \mathbb{R}$ donc
  - elle possède des primitives sur cet intervalle
  - et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.
  On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \int e^x . \cos x.dx$

  Nous allons utiliser la fait que $\cos x = \Re(e^{ix})$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int e^x . \cos x.dx \\
&= \Re\left(\int e^x . e^{ix} . dx\right) \\
&= \Re\left(\int e^{(1+i)x} dx\right) \\
&= \Re\left(\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right) + Cste \\
&= \Re\left(\frac{1-i}{2} e^{(1+i)x}\right) + Cste \\
&= \Re\left(\frac{1-i}{2} e^x e^{ix}\right) + Cste \\
&= \Re\left(\frac{1-i}{2} e^x (\cos(x) + i\sin(x))\right) + Cste \\
&= \frac{e^x}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + Cste
\end{aligned}$$

- On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{e^x}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + Cste}$$

- *il était également possible de réaliser une double intégration par parties*

résolution 18

- La fonction f est définie et continue sur $I =]-1, +1[$ donc
  - elle possède des primitives sur cet intervalle
  - et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.
  On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \int \frac{x}{x^2 - 1} dx$

- On a tout simplement

$$F(x) = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + Cste = \frac{\ln(1 - x^2)}{2} + Cste$$

- On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{\ln(1 - x^2)}{2} + Cste}$$

résolution 19 • La fonction f est définie et continue sur $I = \mathbb{R}$ donc
- elle possède des primitives sur cet intervalle
- et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.
On a donc pour tout $x \in I$

$$F(x) = \int \cos^8 x. \sin^3 x dx = \int \cos^8 x. \sin^2 x. \sin x dx = \int \cos^8 x(1 - \cos^2 x). \sin x dx$$

On effectue le changement de variable $t = \cos x$ et donc $dt = -\sin x dx$.

Ce qui donne

$$F(x) = \int t^8(1 - t^2)(-dt) = \int t^{10} - t^8 dt = \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^9}{9} + Cste = \frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^9 x}{9} + Cste$$

- On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^9 x}{9} + Cste}$$

résolution 20 • La fonction f est définie et continue sur $I =]e^{-1},e[$ donc

- elle possède des primitives sur cet intervalle
- et les primitives sont égales à une constante près

• Notons F une primitive de f sur I.

On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

On effectue le changement de variable $t = \ln x$. On a donc $dt = \dfrac{dx}{x}$ et cela donne

$$F(x) = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t) + Cste = \arcsin(\ln x) + Cste$$

• On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \arcsin(\ln x) + Cste}$$

résolution 21

- Comme

$$4x - x^2 > 0 \iff x(4-x) > 0 \iff 0 < x < 4$$

La fonction f est définie et continue sur $I =]0,4[$ donc
  - elle possède des primitives sur cet intervalle
  - et les primitives sont égales à une constante près

- Notons F une primitive de f sur I.

  On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \int \dfrac{-dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

  Le changement de variable $x = 2t + 2$ (et donc $dx = 2dt$) donne

$$F(x) = \int \frac{-2dt}{\sqrt{4(2t+2) - (2t+2)^2}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos t + Cste = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right) + Cste$$

- On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right) + Cste}$$

résolution 22 • La fonction f est définie et continue sur l'intervalle $I =]-\infty, -1[$ ou l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ donc

- elle possède des primitives sur chaque intervalle I
- et les primitives y sont égales à une constante près

• Notons F une primitive de f sur I.

On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \int \frac{x^2dx}{x+1}$

$$F(x) = \int \frac{(x^2-1)+1}{x+1}dx = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + Cste$$

• On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + Cste}$$

résolution 23 • La fonction f est définie et continue sur $I =]-\pi, +\pi[$ comme quotient de fonctions, le dénominateur ne s'annulant pas

- elle possède des primitives sur cet intervalle
- et les primitives sont égales à une constante près

• Notons F une primitive de f sur I.

On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \int \dfrac{dx}{1+\sin x}$

• En posant $t = \tan(\dfrac{x}{2})$ on a

- d'une part, $dt = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2(\dfrac{x}{2})\right)dx$ c'est à dire $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$
- et d'autre part, $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

• Et ainsi

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{2dt}{(1+t^2)(1+\dfrac{2t}{1+t^2})} \\ &= \int \frac{2dt}{1+2t+t^2} \\ &= 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= \frac{-2}{1+t} + Cste \\ &= \frac{-2}{1+\tan(\dfrac{x}{2})} + Cste \end{aligned}$$

• On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{-2}{1+\tan(\dfrac{x}{2})} + Cste}$$

résolution 24 • La fonction f est définie et continue sur $I = \mathbb{R}$ donc

- elle possède des primitives sur cet intervalle
- et les primitives sont égales à une constante près

• Notons F une primitive de f sur I.

On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \int \dfrac{dx}{e^x + 4e^{-x}}$

• Le changement de variable $t = e^x$ (et donc $dt = e^x dx$) donne

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{dt/t}{t + 4/t} \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 4} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t/2)^2 + 1} \end{aligned}$$

• Le changement de variable $u = \dfrac{t}{2}$ (et donc $dt = 2du$) donne

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t/2)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \arctan(u) + Cste \\ &= \frac{1}{2} \arctan(\frac{t}{2}) + Cste \\ &= \frac{1}{2} \arctan(\frac{e^x}{2}) + Cste \end{aligned}$$

• On trouve donc que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{1}{2} \arctan(\frac{e^x}{2}) + Cste}$$

résolution 25 • La fonction f est définie et continue sur $I = \mathbb{R}$, elle possède donc des primitives sur cet intervalle

- Notons F une primitive de f sur I.

  On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \int e^{-x} \ln(1+e^x)dx$

- Le changement de variable $t = e^x$ (et donc $dt = e^x dx$) donne

$$F(x) = \int \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$$

- Nous allons réaliser une intégration par parties en posant

$$u(t) = \ln(1+t) \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{-1}{t} \quad ; \text{ on a alors } u'(t) = \frac{1}{1+t} \quad \text{et } v'(t) = \frac{1}{t^2}$$

  D'où

$$\int \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt = -\frac{\ln(1+t)}{t} + \int \frac{dt}{t(t+1)}$$

- On réalise une décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$$

  On a ainsi

$$\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} dt = \ln|t| - \ln|t+1| + Cste$$

- Au final cela donne

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{\ln(1+t)}{t} + \ln|t| - \ln|t+1| + Cste \\ &= -\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + x - \ln(e^x+1) + Cste \\ &= x - (1+e^{-x})\ln(1+e^x) + Cste \end{aligned}$$

- On trouve ainsi que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto x - (1+e^{-x})\ln(1+e^x) + Cste}$$

résolution 26 • La fonction f est définie et continue sur $I =]0, +\infty[$,
elle possède donc des primitives sur cet intervalle

- Notons F une primitive de f sur I.

  On a donc pour tout $x \in I, F(x) = \int \dfrac{2\ln x}{x(1+\ln^4 x)}$

- Le changement de variable $t = \ln x$ (et donc $dt = \dfrac{dx}{x}$ donne

$$F(x) = \int \frac{2tdt}{1+t^4}$$

- Le changement de variable $u = t^2$ (et donc $du = 2tdt$) donne

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{du}{1+u^2} \\ &= \arctan(u) + Cste \\ &= \arctan(t^2) + Cste \\ &= \arctan((\ln(x))^2) + Cste \end{aligned}$$

- On trouve ainsi que les primitives de f sur I sont les fonctions F définies par

$$\boxed{F : x \mapsto \arctan(\ln^2(x)) + Cste}$$

$\boxed{\textbf{résolution 27}}$

$\boxed{\textbf{résolution 28}}$

$\boxed{\textbf{résolution 30}}$