matrices

exercice 1 (*)

Soit $E = \mathbb{R}^2$.
On considère la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ *où* $\vec{e}_1 = (1,1)$ *et* $\vec{e}_2 = (1,0)$
ainsi que la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = ((1,5),(2,-1),(0,1)\}$.
Ecrire la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ *dans la base* $\mathcal{B}$

exercice 2 (*)

Soit $E = \mathbb{R}^2$.
On considère la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ *où* $\vec{e}_1 = (1,1)$ *et* $\vec{e}_2 = (1,0)$
ainsi que l'endomorphisme $\boxed{\begin{array}{llll} f: & E & \longrightarrow & E \\ & (a,b) & \longmapsto & (a+b,a) \end{array}}$
Ecrire la matrice de f *relativement à la base* $\mathcal{B}$

exercice 3 (**)

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ *muni de la base* $\mathcal{B} = (1,X-2,(X-2)^2)$,
ainsi que l'endomorphisme $\boxed{\begin{array}{lll} f: E & \longrightarrow & E \\ \quad P & \longmapsto & P(2).X \end{array}}$
Ecrire la matrice de f *relativement à la base* $\mathcal{B}$

exercice 4 (**)

On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$ *muni de sa base canonique* $\mathcal{B} = (1,X,X^2,X^3)$,
ainsi que l'endomorphisme $\boxed{\begin{array}{llll} f: & E & \longrightarrow & E \\ & P = P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}}$
Déterminer la matrice de f *relativement à la base* $\mathcal{B}$

exercice 5 (***)

On considère $E = \mathrm{vect}(\cos, \sin) \subset C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *muni de la base* $\mathcal{B} = (\cos, \sin)$,
ainsi que l'endomorphisme $\boxed{\begin{array}{lll} u: E & \longrightarrow & E \\ \quad f & \longmapsto & u(f) \end{array}}$ *défini par* $\forall x \in \mathbb{R}, u(f)(x) = f(x+\pi/3)$
Ecrire la matrice de u *relativement à la base* $\mathcal{B}$

exercice 6 (***)

On note E *le sous-espace vectoriel des suites réelles de base* $\mathcal{B} = (x,y)$
où $x = (x_n) = (2^n)$ *et* $y = (y_n) = (n.2^n)$
On considère les suites $a = (a_n) = (3.2^{n+1})$, $b = (b_n) = (n2^n)$, $c = (c_n) = ((5n-3).2^n)$
Ecrire la matrice de la famille de vecteurs (a,b,c) *dans la base* $\mathcal{B}$

exercice 7 (*)

On considère $\mathcal{B} = (1,X,X^2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$
Ecrire la matrice de la famille de vecteurs $(P_1,P_2,P_3) = (X^2-2X+5, 3X+8, 2X^2-X)$ *dans la base* $\mathcal{B}$

exercice 8 (*)

On considère $\mathcal{B} = (X^2,X,1)$ *une base de* $\mathbb{R}_2[X]$

Ecrire la matrice de la famille de vecteurs $(P_1,P_2,P_3)=(X^2-2X+5,3X+8,2X^2-X)$ *dans la base* $\mathcal{B}$

exercice 9 (**)

On considère $\mathcal{B}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ *la base canonique de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Ecrire la matrice de la famille de vecteurs $(M_1,M_2)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix})$ *dans la base* $\mathcal{B}$

exercice 10 (**)

On considère $\mathcal{B}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ *la base canonique de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Ecrire la matrice de l'endomorphisme $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ & \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix}c&a\\d&b\end{pmatrix}\end{array}}$ *relativement à la base* $\mathcal{B}$

exercice 11 (*)

Soit $E=\mathbb{R}^2$.
On considère la base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ *où* $\vec{e}_1=(1,1)$ *et* $\vec{e}_2=(1,2)$
ainsi que la base $\mathcal{B}'=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2)$ *où* $\vec{\varepsilon}_1=(0,1)$ *et* $\vec{\varepsilon}_2=(1,1)$.
Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$

exercice 12 (*)

Soit $E=\mathbb{R}^2$.
On considère la base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ *où* $\vec{e}_1=(1,0)$ *et* $\vec{e}_2=(1,2)$
ainsi que la base $\mathcal{B}'=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2)$ *où* $\vec{\varepsilon}_1=(0,1)$ *et* $\vec{\varepsilon}_2=(1,1)$.
Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$

exercice 13 (*)

Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$.
Ecrire la matrice de passage de la base $(X^2,X,1)$ *à la base* $(X^2+1,X+1,1)$

exercice 14 (*)

Soit $E=\mathbb{R}^3$.
On note $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
On considère la base $\mathcal{B}'=((1,2,5),(1,3,4),(0,1,8))$
Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$

exercice 15 (**)

Ecrire la matrice de $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (a,b) & \longmapsto & (a+b,a-b,2a)\end{array}}$ *dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$

exercice 16 (**)

Soit $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,x+y,x+y)\end{array}}$.
Ecrire la matrice de f *en ayant muni* $\mathbb{R}^2$ *de sa base canonique et* $\mathbb{R}^3$ *de la base* $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$

exercice 17 (**)

Soit $\boxed{\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & (a,b) & \longmapsto & a.X^2+(a+b).X \end{array}}$

Ecrire la matrice de f *en ayant muni* $\mathbb{R}^2$ *de sa base canonique et* $\mathbb{R}_2[X]$ *de la base* $(1,X,X^2)$

exercice 18 (*2A*)

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 16 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *sont semblables*

exercice 19 (*2A*)

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -5 & 7 \\ -3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ *et* $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *sont semblables.*

exercice 20 (*2A*)

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *sont semblables.*

Solutions

résolution 1

- On écrit les vecteurs $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ et $\vec{f_3}$ comme des combinaisons linéaires de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$

- On a

  i) $\vec{f_1} = (1{,}5) = 5.(1{,}1) - 4.(1{,}0) = 5\vec{e}_1 - 4.\vec{e}_2$

  ii) $\vec{f_2} = (2, -1) = -1.(1{,}1) + 3.(1{,}0) = -1.\vec{e}_1 + 3.\vec{e}_2$

  iii) $\vec{f_3} = (0{,}1) = 1.(1{,}1) - 1.(1{,}0) = 1.\vec{e}_1 - 1.\vec{e}_2$

- On a ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

résolution 2

- On calcule $f(\mathcal{B})$
- On a
  i) $f(\vec{e}_1) = f(1{,}1) = (2{,}1) = (1{,}1) + (1{,}0) = 1.\vec{e}_1 + 1.\vec{e}_2$

  ii) $f(\vec{e}_2) = f(1{,}0) = (1{,}1) = 1.\vec{e}_1 + 0.\vec{e}_2$
- On a donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

résolution 3 • On calcule l'image de $\mathcal{B}$ par f

- On a
  i) $f(1) = 1.X = 2.1 + 1.(X-2) + 0.(X-2)^2$

  ii) $f(X-2) = 0$

  iii) $f((X-2)^2) = 0$

- On a ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{résolution 4}}$ • On calcule l'image de la base $\mathcal{B}$ par f

- On a

  i) $f(1) = 1 = 1.1 + 0.X + 0.X^2 + 0.X^3$

  ii) $f(X) = X + 1 = 1.1 + 1.X + 0.X^2 + 0.X^3$

  iii) $f(X^2) = (X+1)^2 = 1.1 + 2.X + 1.X^2 + 0.X^3$

  iv) $f(X^3) = (X+1)^3 = 1.1 + 3.X + 3.X^2 + 1.X^3$

- et ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

résolution 5 • On calcule l'image de $\mathcal{B}$ par u

- On a

i) $u(\cos) = \dfrac{1}{2}.\cos - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\sin$
En effet:
$\forall x \in \mathbb{R}, u(\cos)(x) = \cos(x+\pi/3) = \cos(x).\cos(\pi/3) - \sin(x)\sin(\pi/3) = \dfrac{1}{2}.\cos(x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\sin(x)$

ii) $u(\sin) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\cos + \dfrac{1}{2}.\sin$
En effet:
$\forall x \in \mathbb{R}, u(\sin)(x) = \sin(x+\pi/3) = \sin(x).\cos(\pi/3) + \sin(\pi/3).\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\cos(x) + \dfrac{1}{2}.\sin(x)$

- On a ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

résolution 6 • On écrit les vecteurs a, b et c comme des combinaisons linéaires de x et de y

- On a

  i) $a = 6.x = 6.x + 0.y$
  En effet:
  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 3.2^{n+1} = 3.2.2^n = 6.2^n = 6.x_n$

  ii) $b = y = 0.x + 1.y$

  iii) $c = -3.x + 5.y$
  En effet:
  $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = (5n-3).2^n = 5.n.2^n - 3.2^n = 5.y_n - 3.x_n$

- On a ainsi
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a,b,c) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

résolution 7

- On écrit les vecteurs P_1, P_2 et P_3 comme des combinaisons linéaires des vecteurs de la base $\mathcal{B}$
- On a
  i) $P_1 = 5.1 + (-2).X + 1.X^2$

  ii) $P_2 = 8.1 + 3.X + 0.X^2$

  iii) $P_3 = 0.1 + (-1).X + 2.X^2$

- On a ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1,P_2,P_3) = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

résolution 8 • On écrit les vecteurs P_1, P_2 et P_3 comme des combinaisons linéaires des vecteurs de la base $\mathcal{B}$

- On a
  i) $P_1 = 1.X^2 + (-2).X + 5.1$

  ii) $P_2 = 0.X^2 + 3.X + 8.1$

  iii) $P_3 = 2.X^2 + (-1).X + 0.1$

- On a ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1,P_2,P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

résolution 9 • On écrit les vecteurs M_1 et M_2 comme des combinaisons linéaires des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

- On a

i) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.E_{11} + 2.E_{12} + 3.E_{21} + 4.E_{22}$

ii) $M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 5.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5.E_{11} + 6.E_{12} + 7.E_{21} + 8.E_{22}$

- On a ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(M_1,M_2) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

résolution 10 • On calcule l'image de $\mathcal{B}$ par f

i) $f(E_{11}) = f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}$

ii) $f(E_{12}) = f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{22}$

iii) $f(E_{21}) = f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}$

iv) $f(E_{22}) = f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{21}$

• On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

résolution 11

- On a

$$\vec{\varepsilon}_1 = (0{,}1) = (1{,}2) - (1{,}1) = \vec{e}_2 - \vec{e}_1 = \boxed{\text{-1}}.\vec{e}_1 + \boxed{1}.\vec{e}_2$$

- et évidemment

$$\vec{\varepsilon}_2 = (1{,}1) = \vec{e}_1 = \boxed{1}.\vec{e}_1 + \boxed{0}.\vec{e}_2$$

- On écrit alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

résolution 12

- On a

$$\vec{\varepsilon}_1 = (0,1) = \frac{1}{2}\left[(1,2) - (1,0)\right] = \boxed{-\frac{1}{2}}.\vec{e}_1 + \boxed{\frac{1}{2}}.\vec{e}_2$$

- et

$$\vec{\varepsilon}_2 = (1,1) = \frac{1}{2}\left[(1,0) + (1,2)\right] = \boxed{\frac{1}{2}}.\vec{e}_1 + \boxed{\frac{1}{2}}.\vec{e}_2$$

- On écrit alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

résolution 13 • Notons $P_1 = X^2 \quad ,P_2 = X \quad$ et $P_3 = 1$
ainsi que $Q_1 = X^2 + 1 \quad ,Q_2 = X + 1 \quad$ et $Q_3 = 1$

- On a

$$Q_1 = X^2 + 1 = P_1 + P_3 = \boxed{1}.P_1 + \boxed{0}.P_2 + \boxed{1}.P_3$$

$$Q_2 = X + 1 = P_2 + P_3 = \boxed{0}.P_1 + \boxed{1}.P_2 + \boxed{1}.P_3$$

$$Q_3 = P_3 = \boxed{0}.P_1 + \boxed{0}.P_2 + \boxed{1}.P_3$$

- Ainsi

$$P = \mathrm{Mat}_{(X^2,X,1)}(X^2+1,X+1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

résolution 14 • comme la base de départ est la base canonique, il n'y a aucun calcul à faire! En effet on a

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1{,}2{,}5) = \boxed{1}.\vec{i} + \boxed{2}.\vec{j} + \boxed{5}.\vec{k}$$

$$\vec{\varepsilon}_2 = (1{,}3{,}4) = \boxed{1}.\vec{i} + \boxed{3}.\vec{j} + \boxed{4}.\vec{k}$$

$$\vec{\varepsilon}_3 = (0{,}1{,}8) = \boxed{0}.\vec{i} + \boxed{1}.\vec{j} + \boxed{8}.\vec{k}$$

- On écrit alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

résolution 15 • Lorsque l'on munit les espaces $\mathbb{R}^n$ de leurs bases canoniques, il est très simple d'écrire les matrices!

car un vecteur de $\mathbb{R}^n$ a pour coordonnées dans la base canonique lui-même!

- ici, on a
  i) $f((1{,}0)) = (1{,}1{,}2)$

  ii) $f((0{,}1)) = (1, -1{,}0)$

  On a donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

résolution 16 • La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}) = ((1{,}0),(0{,}1))$

- On note $\mathcal{C} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3) = ((1{,}0{,}0),(1{,}1{,}0),(1{,}1{,}1))$ la base proposée pour $\mathbb{R}^3$
- On va déterminer l'image de la base $\mathcal{B}$ par f
- On a
  i) $f(\vec{i}) = f((1{,}0)) = (1{,}1{,}1) = \vec{\varepsilon}_3$

  ii) $f(\vec{j}) = f((0{,}1)) = (1{,}1{,}1) = \vec{\varepsilon}_3$

  Ainsi
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

résolution 17

- La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}) = ((1{,}0),(0{,}1))$
- On va déterminer l'image de la base $\mathcal{B}$ par f.
- On a
  i) $f(\vec{i}) = f((1{,}0)) = X^2 + X = 0.1 + 1.X + 1.X^2$

  ii) $f(\vec{j}) = f((0{,}1)) = X = 0.1 + 1.X + 0.X^2$

  Ainsi
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

résolution 18

- On note $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
  On a donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
- Il s'agit de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, c'est à dire telle que $\begin{cases} f(\vec{e}_1) & = 2\vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) & = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \end{cases}$
- Notons $\vec{e}_1 = (x,y) = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ et $X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
  On a les équivalences suivantes
  $$f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 \Longleftrightarrow AX_1 = 2X_1 \Longleftrightarrow (A - 2I_2).X_1 = 0$$
  Or
  $$(A - 2I_2).X_1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 16 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x - y & = 0 \\ 16x - 4y & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y = 4x$$
  On peut donc par exemple poser $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ càd $\vec{e}_1 = \vec{i} + 4\vec{j} = (1,4)$
- Notons maintenant $\vec{e}_2 = (x,y) = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
  On a les équivalences suivantes
  $$f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \Longleftrightarrow AX_2 = X_1 + 2X_2 \Longleftrightarrow (A - 2I_2)X_2 = X_1$$
  Or
  $$(A - 2I_2)X_2 = X_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 16 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x - y & = 1 \\ 16x - 4y & = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow y = 4x - 1$$
  On peut donc par exemple poser $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ càd $\vec{e}_2 = -\vec{j} = (0,-1)$
- Vérifions que la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ constitue bien une base de $\mathbb{R}^2$, par exemple en utilisant le déterminant.
  On a bien $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$
- Conclusion: on a prouvé que A et B sont associées à un même endomorphisme: elles sont donc semblables. On peut même préciser d'après la formule de changement de base pour les endomorphismes que l'on a l'égalité matricielle $A = P.B.P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

résolution 19 • Soit $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,
et f l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathcal{B}$. On a donc $\boxed{A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}$.

- Il s'agit de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'=(\vec{e}_1,\vec{e}_2\,\vec{e}_3)$ telle que $B=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$,
  c'est à dire telle que $\begin{cases} f(e_1) & =-\vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) & =\vec{e}_1-\vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_3) & =2\vec{e}_3 \end{cases}$

- Notons $\vec{e}_1=(x,y,z)=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$ et $X_1=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

  On a les équivalences suivantes
  $$f(\vec{e}_1)=-\vec{e}_1 \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(\vec{e}_1))=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(-\vec{e}_1) \iff AX_1=-X_1 \iff (A+I_3).X_1=0$$
  Or
  $$(A+I_3).X_1=0 \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & 7 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y+z & =0 \\ -3x-4y+7z & =0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & =z \\ x & =z \end{cases}$$
  On peut donc par exemple poser $X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ càd $\boxed{\vec{e}_1=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=(1,1,1)}$

- Notons maintenant $\vec{e}_2=(x,y,z)=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$ et $X_2=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

  On a les équivalences suivantes
  $$f(\vec{e}_2)=\vec{e}_1-\vec{e}_2 \iff AX_2=X_1-X_2 \iff (A+I_2)X_2=X_1$$
  Or
  $$(A+I_3)X_2=X_1 \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & 7 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \cdots \iff \begin{cases} x & =1+z \\ y & =-1+z \end{cases}$$
  On peut donc par exemple poser $X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ càd $\boxed{\vec{e}_2=\vec{i}-\vec{j}=(1,-1,0)}$

- Notons $\vec{e}_3=(x,y,z)=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$ et $X_3=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

  On a les équivalences suivantes
  $$f(\vec{e}_3)=2\vec{e}_3 \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(\vec{e}_3))=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(2\vec{e}_3) \iff AX_3=2.X_3 \iff (A-2.I_3).X_3=0$$
  Or
  $$(A-2I_3).X_3=0 \iff \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -3 & -7 & 7 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -3x-y+z & =0 \\ -3x-7y+7z & =0 \\ -3x-4y+4z & =0 \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} x & =0 \\ y & =z \end{cases}$$
  On peut donc par exemple poser $X_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ càd $\boxed{\vec{e}_3=\vec{j}+\vec{k}=(0,1,1)}$

- Vérifions que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ constitue bien une base de $\mathbb{R}^3$,
  par exemple en utilisant le déterminant.

  On a $\det_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = -1 \neq 0$

- Conclusion:
  on a prouvé que A et T sont associées au même endomorphisme f: elles sont donc semblables.
  On peut même préciser d'après la formule de changement de base pour les endomorphismes que l'on a l'égalité $A = P.T.P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

résolution 20 • Soit $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,
et f l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathcal{B}$. On a donc $\boxed{A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}$.

- Il s'agit de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2\,\vec{e}_3)$ telle que $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$,
  c'est à dire telle que $\begin{cases} f(e_1) & = -\vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_2) & = \vec{0} \\ f(\vec{e}_3) & = \vec{e}_3 \end{cases}$

- Notons $\vec{e}_3 = (x,y,z) = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

  On a les équivalences suivantes

$$f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(\vec{e}_3)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_3) \iff AX_3 = X_3 \iff (A - I_3).X_3 = 0$$

  Or

$$(A - I_3).X_3 = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x + y + z & = 0 \\ -x + z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = x \\ z & = x \end{cases}$$

  On peut donc par exemple poser $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ càd $\boxed{\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1,1,1)}$

- Notons maintenant $\vec{e}_2 = (x,y,z) = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

  On a les équivalences suivantes

$$f(\vec{e}_2) = \vec{0} \iff AX_2 = 0$$

  Or

$$AX_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \cdots \iff \begin{cases} x & = y \\ z & = 0 \end{cases}$$

  On peut donc par exemple poser $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ càd $\boxed{\vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{j} = (1,1,0)}$

- Notons $\vec{e}_1 = (x,y,z) = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ et $X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

  On a les équivalences suivantes

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(\vec{e}_1)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_2) \iff AX_1 = X_2$$

  Or

$$A.X_1 = X_2 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + y + z & = 1 \\ z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = x + 1 \\ z & = 0 \end{cases}$$

  On peut donc par exemple poser $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ càd $\boxed{\vec{e}_1 = \vec{j} = (0,1,0)}$

- Vérifions que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ constitue bien une base de $\mathbb{R}^3$,
par exemple en utilisant le déterminant.

On a $\det_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = -1 \neq 0$

- Conclusion:
on a prouvé que A et T sont associées au même endomorphisme f: elles sont donc semblables.
On peut même préciser d'après la formule de changement de base pour les endomorphismes que l'on a l'égalité $A = P.T.P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$