espérance (1A)

exercice 1 (*)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4\,;\,0.2)$
Déterminer $E(\cos(\dfrac{\pi}{2}X))$

exercice 2 (*)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1,2,\dots,5\})$
Déterminer $E(X^4)$

exercice 3 (**)

Soit $n \geqslant 1$ *un entier fixé.*
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{0,1,2,\dots,n\})$.
Déterminer $E(e^X)$

exercice 4

Les réponses

réponse 1

réponse 2

réponse 3

réponse 4

Détails

résolution 1

- On a $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$ et $\forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \binom{4}{k} 0.2^k 0.8^{4-k}$
- On note $Y = \cos(\frac{\pi}{2}X)$
- Le théorème de transfert permet d'affirmer que

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{4} \cos(\frac{k.\pi}{2})P(X = k) = P(X = 0) - P(X = 2) + P(X = 4) = 0.2^4 - 6.(0.2)^2(0.8)^2 + 0.8^4$$

(car $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$ et $\cos\frac{2\pi}{2} = -1$ et $\cos(0) = \cos\frac{4\pi}{2} = 1$)

Numériquement on trouve $\boxed{E(Y) = 0.2576}$

résolution 2

- On a $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5\}$ et $\forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \dfrac{1}{5}$
- On note $Y = X^4$
- Le théorème de transfert permet d'affirmer que

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{5} k^4 P(X = k) = \sum_{k=1}^{5} k^4 . \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{5} k^4 = \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4}{5}$$

Numériquement, cela donne $\boxed{E(Y) = \dfrac{979}{5}}$

résolution 3

- On a $X(\Omega) = \{0,1,2,\ldots,n\}$ et $\forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \dfrac{1}{n+1}$
- Notons $Y = e^X$
- Le théorème de transfert permet d'affirmer que

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} e^k P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} e^k.\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}.\sum_{k=0}^{n} e^k$$

Or on reconnait une somme partielle géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} e^k = \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e}$$

On trouve ainsi au final $\boxed{E(Y) = \dfrac{1 - e^{n+1}}{(1 - e)(n+1)}}$

$\boxed{\textbf{résolution 4}}$