équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants (1A)

exercice 1 (*)

Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = \cos(2x)$ *sur* $I = \mathbb{R}$

exercice 2 (*)

Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 10y' + 41y = \sin(x)$ *sur* $I = \mathbb{R}$

exercice 3 (**)

Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + y = x.\cos(x)$ *sur* $I = \mathbb{R}$

exercice 4 (*)

Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 3y' - 18y = xe^{4x}$ *sur* $I = \mathbb{R}$

exercice 5 (*)

Donner la solution générale complexe de l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = 0$

exercice 6 (*)

Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 5y = 10$ *sur* $I = \mathbb{R}$

exercice 7 (*)

Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + y = x.\sin(x)$ *sur* $I = \mathbb{R}$

exercice 8 (**)

Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \sin^3(x)$ *sur* $I = \mathbb{R}$
(on pourra linéariser le second membre et utiliser le principe de superposition)

exercice 9 (*)

m est un paramètre réel.
Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = e^{mx}$

exercice 10 (**)

m est un paramètre réel.
Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = xe^{mx}$

exercice 11

exercice 12

Solutions

résolution 1 • L'équation caractéristique de l'équa. diff. est $X^2 - 2X + 2 = 0$ qui a pour racines complexes conjuguées $1+i$ et $1-i$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x(A\cos(x) + B\sin(x)) \end{array} \qquad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

- On sait que $\cos(2x)$ est la partie réelle de e^{2ix}.
  Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique,
  on peut chercher une solution particulière de la forme $y(x) = K.\cos(2x) + L.\sin(2x)$

  On a
  $$y'(x) = -2K.\sin(2x) + 2L.\cos(2x)$$
  et
  $$y''(x) = -4K.\cos(2x) - 4L.\sin(2x)$$
  D'où en remplaçant dans l'équation
  $$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = (-2K - 4L)\cos(2x) + (4K - 2L)\sin(2x)$$
  Le système $\begin{cases} -2K - 4L & = 1 \\ 4K - 2L & = 0 \end{cases}$ possède comme solution $(K,L) = \left(\dfrac{-1}{10}, \dfrac{-1}{5}\right)$
  une solution particulière est donc
  $$y : x \mapsto \frac{-1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{5}\sin(2x)$$

- La solution générale de l'équation complète est ainsi

  $$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-1}{10}\cos(2x) - \dfrac{1}{5}\sin(2x) + e^x(A\cos(x) + B\sin(x)) \end{array} \qquad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2}$$

- remarque: on aurait également pu procéder par complexification

résolution 2 • L'équation caractéristique de l'équa.diff. est $X^2 - 10X + 41 = 0$ qui a pour racines complexes conjuguées $5 + 4i$ et $5 - 4i$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\begin{array}{rcl} y(: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{5x}(A\cos(4x) + B\sin(4x)) \text{ avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

- On sait que $\sin(x)$ est la partie imaginaire de e^{ix}
  Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique,
  on peut chercher une solution particulière de la forme $y(x) = K.\cos(x) + L.\sin(x)$

  On a
  $$y'(x) = -K.\sin(x) + L.\cos(x)$$
  et
  $$y''(x) = -K.\cos(x) - L.\sin(x)$$
  D'où en remplaçant dans l'équation
  $$y''(x) - 10y'(x) + 41y(x) = (40K - 10L)\cos(x) + (10K + 40L)\sin(x)$$
  Le système $\begin{cases} 40K - 10L & = 0 \\ 10K + 40L & = 1 \end{cases}$ possède comme solution $(K,L) = \left(\dfrac{1}{170}, \dfrac{2}{85}\right)$
  une solution particulière est donc
  $$y : x \mapsto \frac{1}{170}\cos(x) + \frac{2}{85}\sin(x)$$

- La solution générale de l'équation complète est ainsi

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{170}\cos(x) + \dfrac{2}{85}\sin(x) + e^{5x}(A\cos(4x) + B\sin(4x)) \end{array} \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2}$$

résolution 3 • L'équation caractéristique de l'équa.diff. est $X^2+1=0$ qui a pour racines complexes conjuguées i et $-i$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\begin{array}{rcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A\cos(x)+B\sin(x) \end{array} \qquad \text{avec } (A,B)\in\mathbb{R}^2$$

- On va complexifier cette équation pour déterminer une solution particulière.
  On sait que $\cos x$ est la partie réelle de e^{ix}, on va donc s'intéresser à l'équation

$$y''+y=x.e^{ix} \quad (*)$$

Comme i est une solution simple de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière de $(*)$ sous la forme $y(x)=P(x)e^{ix}$ avec $\deg(P)=\deg(X)+1=2$

On pose
$$y(x)=(ax^2+bx+c)e^{ix}$$
(en fait, on sait qu'il n'y aura aucune condition sur c et donc on pourrait l'omettre...)
On a alors
$$y'(x)=(iax^2+(2a+ib)x+b+ic)e^{ix}$$
et
$$y''(x)=(-ax^2+(4ai-b)x+2a+2ib-c)e^{ix}$$
En reportant dans $(*)$ cela donne

$$(4aix+2a+2ib)e^{ix}=xe^{ix}$$

On considère alors le système $\begin{cases} 4ai & =1 \\ 2a+2ib & =0 \end{cases}$ qui possède comme solution $(a,b)=\left(\frac{-i}{4},\frac{1}{4}\right)$
rem: comme prévu, il n'y a pas de condition sur c, on choisira $c=0$

Une solution particulière de $(*)$ est donc $y:x\mapsto(\frac{-i}{4}x^2+\frac{1}{4}x)e^{ix}=\frac{1}{4}(-ix^2+x)e^{ix}$

Il nous reste à prendre la partie réelle de cette fonction pour obtenir une solution particulière de l'équation de départ.

$$\begin{aligned} Re\left(\frac{1}{4}(-ix^2+x)e^{ix}\right) &= \frac{1}{4}Re\left((-ix^2+x)(\cos(x)+i\sin(x))\right) \\ &= \frac{1}{4}(x\cos(x)+x^2\sin(x)) \end{aligned}$$

- Conclusion: la solution générale de l'équation complète est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x\cos(x)+x^2\sin(x)}{4}+A\cos(x)+B\sin(x) \end{array} \qquad \text{avec } (A,B)\in\mathbb{R}^2}$$

résolution 4 • L'équation caractéristique de l'équa.diff. est $X^2 - 3X - 18 = 0$ qui a pour racines réelles distinctes -3 et 6.

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Ae^{-3x} + Be^{6x} \end{array} \qquad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

- Comme 4 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière de la forme $y(x) = (Kx + L)e^{4x}$

On a

$$y'(x) = (4Kx + 4L + K)e^{4x}$$

et

$$y''(x) = (16Kx + 16L + 8K)e^{4x}$$

D'où en remplaçant dans l'équation

$$y''(x) - 3y'(x) + 18y(x) = (-14Kx + 5K - 14L)e^{4x}$$

Le système $\begin{cases} -14K & = 1 \\ 5K - 14L & = 0 \end{cases}$ possède comme solution $(K,L) = \left(\dfrac{-1}{14}, \dfrac{-5}{196}\right)$
une solution particulière est donc

$$y : x \mapsto \left(\frac{-1}{14}x - \frac{5}{196}\right) e^{4x} = \frac{-1}{196}(14x + 5)e^{4x}$$

- La solution générale de l'équation complète est ainsi

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-1}{196}(14x + 5)e^{4x} + Ae^{-3x} + Be^{6x} \end{array} \qquad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2}$$

résolution 5 • L'équation caractéristique de l'équa.diff. est $X^2 + 2X - 3 = 0$ qui a pour racines réelles distinctes 1 et -3.

La solution générale de cette équation homogène est donc

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Ae^{-3x} + Be^{x} \end{array} \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{C}^2}$$

résolution 6 • L'équation caractéristique de l'équa.diff. est $X^2 - 4X + 5 = 0$ qui a pour racines complexes conjuguées $2 + i$ et $2 - i$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{2x}(A\cos(x) + B\sin(x)) \end{array} \qquad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

- Une solution particulière évident est la fonction constante $y : x \mapsto 2$

- La solution générale de l'équation complète est donc

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2 + e^{2x}(A\cos(x) + B\sin(x)) \end{array} \qquad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2}$$

résolution 7 • L'équation caractéristique de l'équa.diff. est $X^2+1=0$ qui a pour racines complexes conjuguées i et $-i$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A\cos(x) + B\sin(x) \end{array} \qquad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

- On va complexifier cette équation pour déterminer une solution particulière.
  On sait que $\sin x$ est la partie imaginaire de e^{ix}, on va donc s'intéresser à l'équation

$$y'' + y = x.e^{ix} \quad (*)$$

Comme i est une solution simple de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière de $(*)$ sous la forme $y(x) = P(x)e^{ix}$ avec $\deg(P) = \deg(X) + 1 = 2$

On pose

$$y(x) = (ax^2 + bx + c)e^{ix}$$

(en fait, on sait qu'il n'y aura aucune condition sur c et donc on pourrait l'omettre...)
On a alors

$$y'(x) = (iax^2 + (2a + ib)x + b + ic)e^{ix}$$

et

$$y''(x) = (-ax^2 + (4ai - b)x + 2a + 2ib - c)e^{ix}$$

En reportant dans $(*)$ cela donne

$$(4aix + 2a + 2ib)e^{ix} = xe^{ix}$$

On considère alors le système $\begin{cases} 4ai & = 1 \\ 2a + 2ib & = 0 \end{cases}$ qui possède comme solution $(a,b) = \left(\dfrac{-i}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$
rem: comme prévu, il n'y a pas de condition sur c, on choisira $c = 0$

Une solution particulière de $(*)$ est donc $y : x \mapsto (\dfrac{-i}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x)e^{ix} = \dfrac{1}{4}(-ix^2 + x)e^{ix}$

Il nous reste à prendre la partie imaginaire de cette fonction pour obtenir une solution particulière de l'équation de départ.

$$\begin{aligned} Im\left(\frac{1}{4}(-ix^2 + x)e^{ix}\right) &= \frac{1}{4}Im\left((-ix^2 + x)(\cos(x) + i\sin(x))\right) \\ &= \frac{1}{4}(x\sin(x) - x^2\cos(x)) \end{aligned}$$

- Conclusion: la solution générale de l'équation complète est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x\sin(x) - x^2\cos(x)}{4} + A\cos(x) + B\sin(x) \end{array} \qquad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2}$$

résolution 8 • équation sans second membre:

L'équation caractéristique est $X^2+X+1=0$

Les racines sont complexes conjuguées, à savoir $\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

La solution générale de l'équation homogène associée est donc

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2})+B\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})\right) \end{array} \quad \text{avec } (A,B)\in\mathbb{R}^2}$$

- équation avec second membre:
  On va linéariser le second membre puis utiliser le principe de superposition des solutions
  - On a $\sin^3(t)=\left(\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3=\dfrac{-1}{8i}(e^{3it}-3e^{it}+3^{-it}-e^{-3it})=\dfrac{3\sin(t)}{4}-\dfrac{\sin(3t)}{4}$
  - Une solution particulière (évidente) de l'équation $y''+y'+y=\sin(x)$ est $y(x)=-\cos(x)$ (si on ne trouvait pas cette solution évidente, on pouvait procéder de manière standard, voir ci-dessous)
  - solution particulière de l'équation $y''+y'+y=\sin(3x)$
    1. première méthode: on complexifie l'équation
       On considère l'équation différentielle $\overline{z}''+\overline{z}'+\overline{z}=e^{3ix}$.
       On cherche une solution particulière sous la forme ae^{3ix} avec a complexe
       En remplaçant dans l'équation cela donne $(-8+3i)a=1$, soit $a=\dfrac{1}{-8+3i}=\dfrac{-8-3i}{73}$
       On trouve donc comme solution particulière $Im\left(\dfrac{-8-3i}{73}e^{3ix}\right)=\dfrac{-3}{73}\cos(3x)-\dfrac{8}{73}\sin(3x)$
    2. deuxième méthode :
       on cherche une solution sous la forme $y(x)=a\cos(3x)+b\sin(3x)$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$
       On remplace et on aboutit sur le système $\begin{cases}3b-8a & =0\\ -3a-8b & =1\end{cases}$. Ce qui donne $(a,b)=\left(\dfrac{-3}{73},\dfrac{-8}{73}\right)$.
       (on retrouve bien la même solution que par la première méthode)
- En appliquant le principe de superposition on trouve que la solution générale est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y;\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{3}{4}\cos(x)+\frac{3}{292}\cos(3x)+\frac{2}{73}\sin(3x)+e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2})+B\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})\right) \end{array}}$$

résolution 9 • L'équation homogène est $y'' - 2y' + y = 0$

Son équation caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = 0$

Cette équation possède une racine réelle double 1

La solution générale de l'équation homogène est ainsi $\boxed{\begin{array}{rcll} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (Ax+B)e^x & \end{array}}$

- Equation complète: on discute suivant que $m = 1$ ou pas

i) $\boxed{\text{cas où } m \neq 1}$

Comme m n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $y(x) = K.e^{mx}$ avec K constante.
On a alors $y'(x) = Kme^{mx}$ et $y''(x) = Km^2e^{mx}$
en reportant dans l'équation cela donne $K(m^2 - 2m + 1)e^{mx} = e^{mx}$
On trouve $K = \dfrac{1}{m^2 - 2m + 1} = \dfrac{1}{(m-1)^2}$

La solution générale de l'équation complète est ainsi

$$\boxed{\begin{array}{rcll} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (Ax+B)e^x + \dfrac{e^{mx}}{(m-1)^2} & \end{array}}$$

ii) $\boxed{\text{cas où } m = 1}$

Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $y(x) = P(x)e^{mx}$ avec P polynôme de degré 2.
Considérons $y(x) = (Kx^2 + Lx + M)e^x$

(remarque: on sait déjà que l'on n'aura pas de conditions sur L et M...
et donc il est même inutile des écrire...)

En remplaçant dans l'équation complète on aboutit à $2Ke^x = e^x$ et donc $K = \dfrac{1}{2}$

La solution générale de l'équation complète est ainsi

$$\boxed{\begin{array}{rcll} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (Ax+B)e^x + \dfrac{x^2e^x}{2} & \end{array}}$$

résolution 10 • L'équation homogène est $y'' - 2y' + y = 0$

Son équation caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = 0$

Cette équation possède une racine réelle double 1

La solution générale de l'équation homogène est ainsi $\boxed{\begin{array}{rcll} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (Ax+B)e^x & \end{array}}$

- Equation complète: on discute suivant que $m = 1$ ou pas

i) $\boxed{\text{cas où } m \neq 1}$

Comme m n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $y(x) = (Kx + L).e^{mx}$ avec K et L deux constante.
On a alors $y'(x) = (mKx + mL + K)e^{mx}$ et $y''(x) = (m^2Kx + m^2L + 2mK)e^{mx}$
en reportant dans l'équation cela donne

$$\left[(m-1)^2Kx + 2(m-1)K + (m-1)^2L\right] e^{mx} = xe^{mx}$$

ce qui donne le système $\begin{cases} (m-1)^2K & = 1 \\ 2(m-1)K + (m-1)^2L & = 0 \end{cases}$
On trouve $K = \dfrac{1}{(m-1)^2}$ et $L = \dfrac{-2}{(m-1)^3}$

La solution générale de l'équation complète est ainsi

$$\boxed{\begin{array}{rcll} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (Ax+B)e^x + \dfrac{((m-1)x-2)e^{mx}}{(m-1)^3} & \end{array}}$$

ii) $\boxed{\text{cas où } m = 1}$

Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $y(x) = P(x)e^x$ avec P polynôme de degré 3.
Considérons $y(x) = (Kx^3 + Lx^2 + Mx + N)e^x$

*(remarque: on sait déjà que l'on n'aura pas de conditions sur M et N...
et donc il est même inutile des écrire...)*

En remplaçant dans l'équation complète on aboutit à $(6Kx + 2L)e^x = xe^x$
et donc $K = \dfrac{1}{6}$ et $L = 0$

La solution générale de l'équation complète est ainsi

$$\boxed{\begin{array}{rcll} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (Ax+B)e^x + \dfrac{x^3e^x}{6} & \end{array}}$$

résolution 11

résolution 12