équations différentielles linéaires du premier ordre(1A)

exercice 1 (*)

Résoudre sur $I =]0,\pi[$ *l'équation différentielle* $\sin(x).y' - \cos(x).y = -1$

exercice 2 (*)

Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ *l'équation différentielle* $(2 + \cos x).y' - \sin(x).y = (2 + \cos x).\sin x$

exercice 3 (*)

Résoudre sur $I =]0,\pi[$ *l'équation différentielle* $\sin^3(x).y'(x) - 2\cos(x).y(x) = 0$

exercice 4 (**)

Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ *l'équation différentielle* $(2 + \cos x).y' + \sin(x).y = (2 + \cos x).\sin x$

exercice 5 (*)

Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ *l'équation différentielle* $(x^2 + 1)y' - xy = (x^2 + 1)^{3/2}$

exercice 6 (**)

Résoudre sur $I =]-1,+1[$ *l'équation différentielle* $y' - \dfrac{x}{1+x^2}y = \dfrac{1+x^2}{\sqrt{1-x^4}}$

exercice 7 (*)

Résoudre sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ *l'équation différentielle* $y' + \tan(x).y = -\cos^2(x)$

exercice 8 (**)

Résoudre sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ *l'équation différentielle* $y' - \tan(x).y = \cos^3(x)$

exercice 9 (*)

Résoudre sur $I =]-\infty,0[$ *l'équation différentielle* $x^3y' + 4(1 - x^2)y = 0$

exercice 10 (***)

Résoudre sur $I =]-1,+\infty[$ *l'équation différentielle* $(1 + x)^2y' + \arctan(x).y = 0$
(On pourra réaliser une ipp puis une décomposition en éléments simples)

exercice 11

exercice 12

Solutions

résolution 1 • Comme $\sin x$ ne s'annule pas sur I l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' - \frac{\cos x}{\sin x} y = \frac{-1}{\sin x} \qquad \text{sur } I$$

- Notons A une primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{\cos x}{\sin x}$ sur I.

  On a $A(x) = \int -\frac{\cos x}{\sin x} dx = -\ln|\sin x| + Cste$

  et ainsi pour tout $x \in I$ on a $\exp(\ln|\sin x|) = |\sin x| = \sin(x)$
  car sur $I =]0,\pi[$ la fonction sin est strictement positive

- On a donc *la solution générale de l'équation homogène* qui est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{y: } I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.\sin(x) \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est *une solution évidente de l'équation complète!*
  (il est plus simple de le remarquer sur l'équation de départ que sur celle divisée par $\sin x$)

- *La solution générale de l'équation complète* est donc

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{y: } I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.\sin(x) + \cos x \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 2

- Comme 2+$\cos x$ ne s'annule pas sur I l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' - \frac{\sin x}{2+\cos x} y = \sin x \qquad (*) \qquad \text{sur } I$$

- Notons A une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{-\sin x}{2+\cos x}$
  On peut facilement déterminer A
  (par exemple à l'aide du changement de variable $u = \cos x$ (et donc $u = -\sin(x)dx$))
  On a $A(x) = \int \dfrac{-\sin x}{2+\cos x} = \int \dfrac{du}{2+u} = \ln|2+u| + Cste = \ln(2+\cos x) + Cste$

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\exp(-\ln(2+\cos x)) = \dfrac{1}{2+\cos(x)}$
- On a donc *la solution générale de l'équation homogène* qui est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{y: } I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{K}{2+\cos(x)} \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- On détermine maintenant une solution particulière à l'aide de la variation de la constante .
  On pose $y(x) = \dfrac{K(x)}{2+\cos(x)}$ et on remplace dans $(*)$.
  On aboutit à $K'(x) = \sin(x).(2+\cos(x))$

  On détermine $K(x)$ par simple primitivation (même changement de variable!)

$$K(x) = \int \sin(x).(2+\cos(x))dx = \int (2+u)(-du) = -\frac{(2+u)^2}{2} + Cste = -\frac{(2+\cos(x))^2}{2} + Cste$$

  ainsi une solution particulière est $y(x) = -\dfrac{(2+\cos(x))^2}{2(2+\cos x)} = -\dfrac{2+\cos x}{2}$
- On a donc la solution générale de l'équation complète qui est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{2+\cos(x)}{2} + \dfrac{K}{2+\cos(x)} \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 3

- Comme $\sin^3 x$ ne s'annule pas sur I l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' - 2\frac{\cos x}{\sin^3 x}y = 0 \qquad \text{sur } I$$

On reconnait une équation différentielle linéaire homogène

- Notons A une primitive de la fonction $x \mapsto -\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$ sur I.

En effectuant le changement de variable $u = \sin x$ (et donc $du = \cos(x)dx$)

$$A(x) = \int -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{-2du}{u^3} = \frac{1}{u^2} + Cste = \frac{1}{\sin^2(x)} + Cste$$

- On a donc *la solution générale de l'équation homogène* qui est

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{y: } I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & K.\exp(-1/\sin^2(x)) \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 4

- Comme $2+\cos x$ ne s'annule pas sur I l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' + \frac{\sin x}{2+\cos x} y = \sin x \qquad (*) \qquad \text{sur } I$$

- Notons A une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$
  On peut facilement déterminer A
  (par exemple à l'aide du changement de variable $u = \cos x$ (et donc $u = -\sin(x)dx$))
  On a $A(x) = \int \dfrac{\sin x}{2+\cos x} dx = \int \dfrac{-du}{2+u} = -\ln|2+u| + Cste = -\ln(2+\cos x) + Cste$

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\exp(\ln(2+\cos x)) = 2+\cos(x)$
- On a donc *la solution générale de l'équation homogène* qui est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{y: } I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.(2+\cos(x)) \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- On détermine maintenant une solution particulière à l'aide de la variation de la constante .
  On pose $y(x) = K(x).(2+\cos(x))$ et on remplace dans $(*)$.
  On aboutit à

$$K'(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$$

  On détermine $K(x)$ par simple primitivation (même changement de variable!)

$$K(x) = \int \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} dx = \int \frac{-du}{2+u} = -\ln|2+u| + Cste = -\ln(2+\cos x) + Cste$$

  ainsi une solution particulière est $y(x) = -(2+\cos(x))\ln(2+\cos x)$

- On a donc la solution générale de l'équation complète qui est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -(2+\cos(x))\ln(2+\cos x) + K.(2+\cos x) \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 5 • Comme $1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = \sqrt{1+x^2} \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

- On note A une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{-x}{1+x^2}$ sur I.

  On a

$$A(x) = \int \frac{-x}{1+x^2}dx = \frac{-1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{-1}{2}\ln|1+x^2| + Cste = \frac{-1}{2}\ln(1+x^2) + Cste$$

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\exp\left(\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) = \sqrt{1+x^2}$

- On a donc la solution générale de l'équation homogène qui est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K\sqrt{1+x^2} \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- On détermine maintenant une solution particulière à l'aide de la variation de la constante.
  On pose $y(x) = K(x)\sqrt{1+x^2}$ et on remplace dans l'équation différentielle.
  On aboutit à $K'(x) = 1$ et donc de manière évidente $K(x) = x + Cste$

  Une solution particulière est $y(x) = x.\sqrt{1+x^2}$

- On a donc la solution générale de l'équation complète qui est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x.\sqrt{1+x^2} + K\sqrt{1+x^2} \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 6 • On note A une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{-x}{1+x^2}$ sur I.

On a

$$A(x) = \int \frac{-x}{1+x^2}dx = \frac{-1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{-1}{2}\ln|1+x^2| + Cste = \frac{-1}{2}\ln(1+x^2) + Cste$$

Pour tout $x \in I$ on a $\exp\left(\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) = \sqrt{1+x^2}$

- On a donc la solution générale de l'équation homogène qui est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y :]-1,+1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K\sqrt{1+x^2} \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- On détermine maintenant une solution particulière à l'aide de la variation de la constante.
On pose $y(x) = K(x)\sqrt{1+x^2}$ et on remplace dans l'équation différentielle.
On aboutit à $K'(x).\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1+x^2}{\sqrt{1-x^4}}$
ce qui équivaut encore à

$$K'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi $K(x) = \arcsin(x) + Cste$

Une solution particulière est $y(x) = \arcsin(x).\sqrt{1+x^2}$

- On a donc la solution générale de l'équation complète qui est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y :]-1,+1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin(x).\sqrt{1+x^2} + K\sqrt{1+x^2} \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 7 • Notons A une primitive de la fonction tan sur I
On rappelle que
$$A(x) = \int \tan(x)dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos(x)| + Cste$$
et ainsi pour tout $x \in I$ on a $\exp(\ln|\cos(x)|) = |\cos x| = \cos x$
car sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la fonction cos est strictement positive

- On a donc la solution générale de l'équation homogène qui est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{y: } I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.\cos(x) \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- On détermine maintenant une solution particulière à l'aide de la variation de la constante.
On pose $y(x) = K(x).\cos(x)$ et on remplace dans l'équation.
On aboutit à
$$K'(x) = -\cos(x)$$
et ainsi directement $K(x) = -\sin(x) + Cste$

ainsi une solution particulière est $y(x) = -\sin(x).\cos(x) = -\dfrac{\sin(2x)}{2}$
- On a donc la solution générale de l'équation complète qui est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{\sin(2x)}{2} + K.\cos(x) \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 8 • Notons A une primitive de la fonction $-\tan$ sur I
On rappelle que

$$A(x) = \int -\tan(x)dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = \ln|\cos(x)| + Cste$$

et ainsi pour tout $x \in I$ on a $\exp(-\ln|\cos(x)|) = \dfrac{1}{|\cos x|} = \dfrac{1}{\cos x}$
car sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ la fonction cos est strictement positive

- On a donc la solution générale de l'équation homogène qui est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{y: } I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{K}{\cos x} \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- On détermine maintenant une solution particulière à l'aide de la variation de la constante.
On pose $y(x) = \dfrac{K(x)}{\cos x}$ et on remplace dans l'équation.
On aboutit à

$$K'(x) = \cos^4(x)$$

Dans un des exercices de calcul, on a montré que

$$\cos^4 x = \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}$$

On a donc

$$K(x) = \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8}x + Cste$$

ainsi une solution particulière est

$$y(x) = \frac{\dfrac{\sin(4x)}{32} + \dfrac{\sin(2x)}{4} + \dfrac{3}{8}x}{\cos x} = \frac{\sin(4x) + 8\sin(2x) + 12x}{32\cos x}$$

- Ainsi la solution générale de l'équation complète est

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(4x) + 8\sin(2x) + 12x}{32\cos x} + \dfrac{K}{\cos x} \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 9 • Comme x^3 ne s'annule pas sur I l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' + \frac{4(1-x^2)}{x^3}y = 0 \qquad \text{sur } I$$

- Notons A une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{4(1-x^2)}{x^3}$ sur I

  On a
  $$A(x) = \int \frac{4(1-x^2)}{x^3}dx = 4\int \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}dx = \frac{-2}{x^2} - 4\ln|x| + Cste$$
  Pour tout $x \in I$ on a
  $$\exp(\frac{2}{x^2} + 4\ln|x|) = \exp(\frac{2}{x^2}).\exp(4\ln|x|) = \exp(\frac{2}{x^2}).|x|^4 = x^4.\exp(\frac{2}{x^2})$$

- La solution générale de l'équation sur I est donc

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y :]-\infty,0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.x^4.\exp(\dfrac{2}{x^2}) \end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

résolution 10 • $(1+x)^2$ ne s'annule pas sur l'intervalle $I =]-1,+\infty[$ donc l'équation proposée est équivalente à l'équation

$$y' + \frac{\arctan(x)}{(1+x)^2} y = 0 \qquad \text{sur } I$$

- Notons A une primitive de $x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{(1+x)^2}$ sur I

  On note $A(x) = \int \dfrac{\arctan(x)}{(1+x)^2}$

  - On réalise une intégration par parties en posant $u(x) = \arctan(x)$ (et donc $u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$) et $v'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ (et on choisit $v(x) = \dfrac{-1}{1+x}$)
    On obtient
    $$A(x) = \frac{-\arctan x}{1+x} + \int \frac{1}{(1+x^2)(1+x)} dx$$
  - On cherche une décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(1+X^2)(1+X)}$ sous la forme $\dfrac{aX+b}{1+X^2} + \dfrac{c}{1+X}$ et l'on trouve
    $$\frac{1}{(1+X^2)(1+X)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+X} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}X}{X^2+1}$$
    D'où
    $$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)(1+x)} dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|1+x| + \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{4}\ln|1+x^2| + Cste\end{aligned}$$
    et ainsi
    $$\begin{aligned}A(x) &= \frac{-\arctan x}{1+x} + \frac{1}{2}\ln|1+x| + \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{4}\ln|1+x^2| + Cste \\ &= \frac{x-1}{2(x+1)}\arctan(x) + \frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2} + Cste\end{aligned}$$

- On a pour $x \in I$
  $$\exp\left(-\left(\frac{x-1}{2(x+1)}\arctan(x) + \frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\right)\right) = \left(\frac{1+x^2}{(1+x)^2}\right)^{1/4} . \exp\left(\frac{1-x}{2(x+1)}\arctan(x)\right)$$

- La solution générale est ainsi
  $$\boxed{\begin{array}{rcl} y :]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.\left(\dfrac{1+x^2}{(1+x)^2}\right)^{1/4} . \exp\left(\dfrac{1-x}{2(x+1)}\arctan(x)\right)\end{array}} \qquad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\textbf{résolution 11}}$

résolution 12