Droites, Cercles, Projeté orthogonal (1A)

exercice 1

Ecrire une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A(2,4)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{d} = (3,-1)$

exercice 2

Ecrire une représentation paramétrique de la droite d'équation cartésienne $x = 3$

exercice 3

Ecrire une représentation paramétrique de la droite d'équation cartésienne $2x + 3y - 4 = 0$

exercice 4

Déterminer une équation cartésienne de la droite qui passe par les points $A(1,2)$ *et* $B(2,-3)$

exercice 5

Déterminer une équation cartésienne de la droite qui passe par le point $A(2,-3)$ *et de coefficient directeur 4*

exercice 6

Déterminer une équation paramétrique de la droite passant par le point $A(2,3)$ *et de vecteur normal* $\overrightarrow{n} = (1,5)$

exercice 7

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(2,-1)$ *et de vecteur normal* $\overrightarrow{n} = (1,3)$

exercice 8

Donner une équation cartésienne de la droite (D) *parallèle à la droite* (Δ) *d'équation* $3x+2y+9=0$ *et passant par* $A(1,-2)$

exercice 9

Donner un représentation paramétrique de la droite (D) *qui passe par le point* $A(4,-1)$ *et qui est perpendiculaire à la droite* (Δ) *d'équation* $2x - 3y + 5 = 0$

exercice 10 (**)

On considère la droite (D) *qui passe par le point* $A(1,3)$ *et de vecteur directeur* $\overrightarrow{d} = (-1,2)$
Déterminer le projeté orthogonal du point $B(0,7)$ *sur la droite* (D).

exercice 11 (**)

On considère la droite (D) *d'équation cartésienne* $x + y - 4 = 0$
Déterminer le projeté orthogonal du point $B(5,2)$ *sur la droite* (D).

Solutions

résolution 1 • On écrit directement

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & A + t\overrightarrow{d} = (2+3t, 4-t) \end{array}$$

• Ce qui peut se présenter aussi sous la forme

$$\begin{cases} x & = 2+3t \\ y & = 4-t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

résolution 2 C'est tout simplement

$$\begin{cases} x & = 3 \\ y & = t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

résolution 3 • On peut paramétrer par exemple par x, ce qui donne

$$\begin{cases} x & = t \\ y & = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

• On peut aussi paramétrer par y, ce qui donne

$$\begin{cases} x & = 2 - \dfrac{3}{2}t \\ y & = t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

résolution 4 • Il s'agit de la droite qui passe par le point $A(1,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{AB} = (1, -5)$.

• Son équation cartésienne est donnée par le déterminant

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{soit } 5x + y - 7 = 0$$

résolution 5 1. Il s'agit de la droite qui passe par le point $A(2,-3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = (1,4)$

2. Son équation cartésienne est donnée par le déterminant

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ y+3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{soit } _quad 4x - y - 11 = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad y = 4x - 11$$

3. Une autre idée consiste à dire que l'équation est du type $y = 4x + p$

   Comme $A(2, -3)$ est sur la droite, on a $-3 = 4 \times 2 + p$ ce qui donne $p = -11$

   On retrouve

$$y = 4x - 11$$

résolution 6 • On peut dire que c'est la droite passant par le point $A(2,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = (-5,1)$

- Une équation paramétrique possible est donc

$$\begin{cases} x &= 2 - 5t \\ y &= 3 + t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

résolution 7 • Son équation cartésienne est donnée par le produit scalaire

$$\begin{pmatrix} x - 2 \\ y - (-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

ce qui donne

$$x + 3y + 1 = 0$$

résolution 8 • première idée:
Comme la droite (D) a la même direction que la droite (Δ) elle possèdera une équation du type

$$3x + 2y + c = 0$$

où c est une constante que l'on détermine en disant que $A(1, -2)$ passe par (D)
Cela donne la condition

$$c = 1$$

Ainsi l'équation cartésienne de (D) est

$$3x + 2y + 1 = 0$$

- seconde idée:
Comme (Δ) a pour équation $3x + 2y + 9 = 0$, on sait qu'un vecteur normal est $\overrightarrow{n} = (3,2)$.
(D) est ainsi la droite qui passe par le point $A(1, -2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (3,2)$.
Son équation est ainsi donnée par le produit scalaire

$$\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - (-2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

ce qui donne

$$3x + 2y + 1 = 0$$

- troisième idée:
Comme (Δ) a pour équation $3x + 2y + 9 = 0$, on sait qu'un vecteur directeur est $\overrightarrow{d} = (-2,3)$.
(D) est ainsi la droite qui passe par le point $A(1, -2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = (-2,3)$.
Son équation est ainsi donnée par le déterminant

$$\begin{vmatrix} x - 1 & -2 \\ y - (-2) & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne $3x + 2y + 1 = 0$

résolution 9 1. La droite (Δ) d'équation $2x - 3y + 5 = 0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n} = (2, -3)$

2. Ce vecteur $\overrightarrow{n} = (2, -3)$ est un vecteur directeur de (D).

3. Ainsi (D) est la droite qui passe par le point $A(4, -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n} = (2, -3)$, son équation paramétrique est ainsi

$$\begin{cases} x &= 4 + 2t \\ y &= -1 - 3t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

résolution 10 • Notons K le projeté orthogonal du point $B(0,7)$ sur la droite (D).

D'après la formule du projeté orthogonal, on a

$$\overrightarrow{AK} = \frac{<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{d}>}{||\overrightarrow{d}||^2}.\overrightarrow{d}$$

c'est à dire encore

$$K = A + \frac{<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{d}>}{||\overrightarrow{d}||^2}.\overrightarrow{d}$$

Le calcul donne

- $||\overrightarrow{d}||^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$
- $<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{d}> = < \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} > = 9$

D'où

$$K = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{9}{5}.\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 33/5 \end{pmatrix}$$

résolution 11 • On commence par déterminer un point et un vecteur directeur de (D).
On prend par exemple $A(4,0)$ et $\overrightarrow{d} = (1, -1)$

- Notons K le projeté orthogonal du point $B(5,2)$ sur la droite (D).

D'après la formule du projeté orthogonal, on a

$$\overrightarrow{AK} = \frac{<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{d}>}{||\overrightarrow{d}||^2}.\overrightarrow{d}$$

c'est à dire encore

$$K = A + \frac{<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{d}>}{||\overrightarrow{d}||^2}.\overrightarrow{d}$$

Le calcul donne

- $||\overrightarrow{d}||^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$
- $<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{d}> = < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} > = -1$

D'où

$$K = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$