Dénombrement (1A)

exercice 1 (*)

On souhaite colorier les cases ci-dessous. On dispose de crayons Rouges, Verts et Bleus

Dénombrer le nombre de coloriages possibles lorsque l'on souhaite

1. *Avoir les 5 cases de la même couleur*
2. *Avoir les 4 premières cases rouges*
3. *Avoir les 4 premières cases de la même couleur et la cinquième d'une autre couleur*
4. *Avoir toujours deux cases consécutives de couleurs différentes*

exercice 2 (*)

En plaçant dans chaque case ci-dessous un chiffre compris entre 1 *et* 9*, on obtient un code.*

Combien de codes différents obtient-on dans les différents cas suivants

1. *sans condition*
2. *les entiers utilisés sont tous différents*
3. *le premier entier est différent du deuxième*
4. *le premier entier est différent du dernier*

exercice 3 (*)

Une urne contient 5 jetons verts numérotés de 1 à 5, et 4 jetons jaunes numérotés de 1 à 4
On tire simultanément 3 jetons. Déterminer le nombre de tirages

1. *sans condition*
2. *comportant aucun jeton jaune*
3. *comportant 2 jetons verts et 1 jeton jaune*
4. *comportant plus de jetons verts que de jetons jaunes*

exercice 4 (*)

On souhaite colorier les cases ci-dessous. On dispose de crayons Rouges, Verts et Bleus

Dénombrer le nombre de coloriages possibles lorsque l'on souhaite que toutes les couleurs soient utilisées et qu'un groupe de 3 cases consécutives soit de la même couleur.(par exemple VRRRB ou RRRBV)

exercice 5 (*)

On souhaite colorier les cases ci-dessous. On dispose de crayons Rouges, Verts, Bleus et Jaunes

Dénombrer le nombre de coloriages possibles lorsque l'on souhaite que trois couleurs soient utilisées et qu'un groupe de 3 cases consécutives soit de la même couleur.(par exemple VRRRB ou RRRBV)

exercice 6

Déterminer le nombre d'anagrammes des mots suivants

1) $MATHS$ 2) $PLAISIR$ 3)$PROBABILITES$ 4)$DIAGONALISATION$

exercice 7

On dispose d'un sac avec 10 jetons numérotés de 1 à 10.
On prélève une poignée de trois jetons de ce sac.
Déterminer

1. *le nombre total de poignées*
2. *le nombre de poignées qui contient les jetons 1,2 et 3*
3. *le nombre de poignées qui ne contient pas le jeton 1*
4. *le nombre de poignées qui contient le jeton 1*
5. *le nombre de poignées qui ne contient pas le jeton 1, mais qui contient les jetons 2 et 3*
6. *le nombre de poignées qui ne contient pas le jeton 1, mais qui contient un et un seul des jetons 2 et 3*
7. *le nombre de poignées qui contient au moins un des deux jetons 2 et 3*

exercice 8 (*)

On lance un dé équilibré à six faces quatre fois de suite.
Déterminer la probabilité

1. *d'obtenir quatre fois le mÃªme chiffre*
2. *d'obtenir quatre chiffres différents*
3. *d'obtenir successivement quatre chiffres qui se suivent*

exercice 9 (**)

Dans une classe de 33 étudiants(tous intéressés par au moins un domaine des mathématiques)

- *29 adorent les Probabilités*
- *26 adorent la Géométrie*
- *27 adorent l'Algèbre*
- *22 adorent la Géométrie et l'Algèbre*
- *24 adorent les Probabilités et l'Algèbre*
- *20 sont passionnés par les Probabilités, l'Algèbre et la Géométrie*

On interroge un étudiant au hasard.
Déterminer la probabilité que cet étudiant

1. *raffole des Probabilités et de la Géométrie*
2. *apprécie les Probabilités ou la Géométrie*
3. *n'aime que l'Algèbre.*

exercice 10

exercice 11

exercice 12

Les réponses

réponse 1

réponse 2

réponse 3

réponse 4

réponse 5

réponse 6

réponse 7

réponse 8

réponse 9

réponse 10

réponse 11

réponse 12

Détails

résolution 1

1. On choisit la couleur commune aux 5 cases: il y a 3 choix possibles!

2. On choisit la couleur de la dernière case: il y a 3 choix possibles!

3. – Il y a 3 choix de couleur pour les 4 premières cases
   – puis il y a 2 choix de couleur pour la cinquième case

   Il y a donc en tout $3.2 = 6$ choix possibles

4. – Pour la première case il y a 3 choix
   – Pour la seconde case, il y a 2 choix (on écarte la couleur de la première case)
   – Pour la troisième case, il y a 2 choix (on écarte la couleur de la deuxième case)
   – Pour la quatrième case, il y a 2 choix (on écarte la couleur de la troisième case)
   – Pour la cinquième case, il y a 2 choix (on écarte la couleur de la quatrième case)

   Il y a donc en tout $3.2.2.2.2 = 3.2^4 = 48$ choix possibles

résolution 2

1. Pour la première case, il y a 9 choix possibles
   Pour la deuxième case, il y a 9 choix possibles
   Pour la troisièmes case, il y a 9 choix possibles
   Pour la quatrième case, il y a 9 choix possibles.

   Il y a donc en tout 9^4 codes différents possibles

2. Pour la première case, il y a 9 choix possibles
   Pour la deuxième case, il y a 8 choix possibles(on écarte le premier chiffre choisi)
   Pour la troisièmes case, il y a 7 choix possibles(on écarte les deux premiers chiffres choisis)
   Pour la quatrième case, il y a 6 choix possibles(on écarte les trois premiers chiffres choisis)

   il y a donc en tout $9.8.7.6 = \dfrac{9!}{5!}$ codes possibles

3. Pour la première case, il y a 9 choix possibles
   Pour la deuxième case, il y a 8 choix possibles(on écarte le premier chiffre choisi)
   Pour la troisièmes case, il y a 9 choix possibles
   Pour la quatrième case, il y a 9 choix possibles.

   Il y a donc en tout $9.8.9.9 = 8.9^3$ codes différents possibles

4. Pour la première case, il y a 9 choix possibles
   Pour la deuxième case, il y a 9 choix possibles
   Pour la troisièmes case, il y a 9 choix possibles
   Pour la quatrième case, il y a 8 choix possibles(on écarte le premier chiffre choisi)

   Il y a donc en tout $9.9.9.8 = 8.9^3$ codes différents possibles

résolution 3 1. Il y a $\binom{9}{3} = 84$ possibilités de choisir 3 jetons parmi 9

2. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ possibilités de choisir 3 jetons parmi 5

3. Pour faire ce dénombrement, on peut imaginer que l'on a fait deux tas séparés: l'un de jetons verts, l'autre de jetons jaunes.
   - On commence par choisir 2 jetons verts: il y a $\binom{5}{2} = 10$ possibilités
   - Puis on choisit un jeton jaune: il y a $\binom{4}{1} = 4$ possibilités

   Il y a donc au total $\binom{5}{2}\binom{4}{1} = 40$ tirages possibles

4. On opère une disjonction de cas: le tirage comporte plus de jetons verts que de jaunes
   - lorsque le tirage comporte aucun jaune
   - ou lorsqu'il contient 2 verts et un jaune.

   Il s'agit donc de faire la somme des cardinaux précédents!
   Il y a $40 + 10 = 50$ tirages comportant plus de jetons verts que de jaunes.

résolution 4

- On choisit la position du groupe de 3 cases consécutives monocolores: il y a 3 possibilités.
- Puis on colorie ce groupe: il y a 3 possibilités
- On colorie ensuite la première case non coloriée qui se situe la plus à gauche: il y a 2 possiblités (on écarte la couleur du groupe de 3 cases monocolores)
- On colorie enfin la dernière case: il ne reste plus qu'une seule possibilité de choix de couleur

Il y a donc en tout $3.3.2.1 = 18$ possibilités

résolution 5

- On choisit la position du groupe de 3 cases consécutives monocolores: il y a 3 possibilités.
- Puis on colorie ce groupe: il y a 4 possibilités
- On colorie ensuite la première case non coloriée qui se situe la plus à gauche: il y a 3 possiblités (on écarte la couleur du groupe de 3 cases monocolores)
- On colorie enfin la dernière case: il reste deux possibilités de choix de couleur

Il y a donc en tout $3.4.3.2 = 72$ possibilités

résolution 6

1. deux manières de raisonner : chaque anagramme peut être représenté par 5 cases

   (a) On se place du cÃ´té des lettres
      i. On place la lettre M dans une des cinq cases
      ii. Puis on place la lettre A dans une des 4 cases restantes
      iii. Puis on place la lettre T dans une des 3 cases restantes
      iv. Puis on place la lettre H dans une des 2 cases restantes
      v. Puis on place la lettre S dans la case restante

   Il y a donc 5! anagrammes différents

   (b) On se place du cÃ´té des cases
      i. On a le choix entre 5 lettres pour remplir la première case
      ii. On a le choix entre 4 lettres pour remplir la deuxième case
      iii. On a le choix entre 3 lettres pour remplir la troisième case
      iv. On a le choix entre 2 lettres pour remplir la quatrième case
      v. On remplit la dernière case avec la lettre restante

   Il y a donc 5! anagrammes différents

2. La situation PLAISIR est différente de celle de MATHS car… il y a deux I dans le mot!.
   On peut toujours représenter chaque anagramme à l'aide de 7 cases

   Je propose deux solutions

   (a) On fait comme si les deux I étaient des lettres différentes, par exemple l'un est bleu et l'autre rouge
   En tenant compte des couleurs, le nombre d'anagrammes est 7!
   Or ces anagrammes peuvent être regroupés deux par deux (si l'on ne tient plus compte des couleurs).
   Le nombre cherché est donc $\dfrac{7!}{2}$

   (b)
   – on commence par chosir les 2 cases qui accueilleront les 2 I : il y a $\dbinom{7}{2}$ possibilités.
   – puis on place la lettre P dans les cases restantes : 5 choix
   – puis on place la lettre L dans les cases restantes : 4 choix
   – puis on place la lettre A dans les cases restantes : 3 choix
   – puis on place la lettre S dans les cases restantes : 2 choix
   – et on place la lettre R dans la case restante

   Le nombre cherché est donc $\dbinom{7}{2}.5.4.3.2$

3. Cette fois il y a 2 I et deux B !
   - on choisit les 2 cases qui accueilleront les I : il y a $\binom{12}{2}$ possibilités
   - puis on choisit les 2 cases qui accueilleront les B: il y a $\binom{10}{2}$ possibilités
   - puis on place les 8 autres lettres dans les 8 cases restantes : 8! possibilités

   Le nombre cherché est $\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} .8!$

   remarque: en colorant les lettres comme dans la question précédente, on trouve comme formule $\dfrac{12!}{2 \times 2}$

4. - On choisit les 3 cases qui accueilleront les A : $\binom{15}{3}$
   - puis on choisit les 2 cases qui accueilleront les I : $\binom{12}{2}$
   - puis on choisit les 2 cases qui accueilleront les 0 : $\binom{10}{2}$
   - puis on choisit les 2 cases qui accueilleront les N : $\binom{8}{2}$
   - puis on place les 5 autres lettres 5!

   Le nombre cherché est le produit des nombres ci-dessus!

   Avec la méthode des lettre coloriées, cela donne la formule $\dfrac{15!}{3.2.2.2}$

résolution 7

1. $\displaystyle\binom{10}{3}$: c'est la définition de ce coefficient !
2. 1 évidemment!
3. $\displaystyle\binom{9}{3}$
4. On image qu'il y a un sachet qui ne contient que le jeton 1 et un second sachet qui contient tous les autres jetons. On doit prendre un jeton dans le premier sachet (1 choix parmi 1) et 2 jetons dans le deuxième (2 choix parmi neuf).

   Cela nous fait $\displaystyle\binom{1}{1}\cdot\binom{9}{2}$
5. On image qu'il y a un sachet qui ne contient que les jetons 2 et 3, et un second sachet qui contient tous les autres jetons sauf le 1. On doit prendre deux jetons dans le premier sachet (2 choix parmi 2) et 1 jetons dans le deuxième (1 choix parmi sept).

   Cela nous fait $\displaystyle\binom{2}{2}\cdot\binom{7}{1}$
6. On image qu'il y a un sachet qui ne contient que les jetons 2 et 3, et un second sachet qui contient tous les autres jetons sauf le 1. On doit prendre un jetone dans le premier sachet (1 choix parmi 2) et 2 jetons dans le deuxième (1 choix parmi sept).

   Cela nous fait $\displaystyle\binom{2}{1}\cdot\binom{7}{2}$
7. On va compter le nombre de poignées qui comportent un et un seul des jetons 2 et 3 puis le nombres de poignées qui comportent le jeton 2 et le jeton 3: et on fera la somme des deux!

   – le nombre de poignées qui comportent un et un seul des jetons 2 et 3 : $\displaystyle\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{2}$

   – le nombre de poignées qui comportent les deux jetons 2 et 3 : $\displaystyle\binom{2}{2}\cdot\binom{8}{1}$

   Le nombre cherché est donc $\displaystyle\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{2}+\binom{2}{2}\cdot\binom{8}{1}$

résolution 8

– Ici Ω est constitué des 4-listes d'éléments de $E = \{1,2,3,4,5,6\}$
Ainsi
$$\Omega = E \times E \times E \times E = E^4 = \{(1,1,1,1), (1,1,1,2), \dots, (2,3,1,6) \dots, (6,6,6,6)\}$$
et $card(\Omega) = (card\, E)^4 = 6^4$

– Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est égale à $P(A) = \dfrac{card\, A}{card\, \Omega}$

1. Dans ce cas
$$A = \{(1,1,1,1), (2,2,2,2), (3,3,3,3), \dots, (6,6,6,6)\}$$
et ainsi
$$P(A) = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} \approx 0.5\%$$

2. Dans ce cas, A est constitué des 4-listes d'éléments de E distincts deux à deux, c'est à dire des 4-arrangements d'éléments de E.
On a
$$card(A) = 6.5.4.3 = \frac{6!}{2!}$$
(il suffit de penser que pour choisir le premier élément de la 4-liste il y a 6 choix, puis pour le deuxième élément il y a 5 choix, pour le troisième 4 choix et enfin pour le dernier 3 choix.)
Ainsi
$$P(A) = \frac{6.5.4.3}{6^4} = \frac{2.5}{6^2} = \frac{5}{18} \approx 28\%$$

3. Dans ce cas
$$A = \{(1,2,3,4), (2,3,4,5)\ (3,4,5,6), (4,3,2,1), (5,4,3,2), (6,5,4,3)\}$$
et ainsi
$$P(A) = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} \approx 0.5\%$$

résolution 9 – Nous allons calculer tous les cardinaux possibles
(je vous conseille de dessiner 3 "patates" qui s'intersectent)

- Notons
  - P l'ensemble des étudiants probabilistes, et $|P|$ son cardinal
  - A l'ensemble des étudiants algébristes, et $|A|$ son cardinal
  - G l'ensemble des artistes de la géométrie, et $|G|$ son cardinal
- Par hypothèses, on a

$$|P| = 29 \quad ,|G| = 26 \quad ,|A| = 27 \quad ,|G \cap A| = 22 \quad ,|P \cap A| = 24 \quad ,|P \cap A \cap G| = 20$$

Comme tout étudiant de la classe est intéressé par un domaine des mathématiques au moins on a

$$|A \cup G \cup P| = 33$$

- On en déduit que

$$|\overline{P} \cap A \cap G| = |A \cap G| - |A \cap G \cap P| = 22 - 20 = 2$$
$$|\overline{G} \cap A \cap P| = |A \cap P| - |A \cap G \cap P| = 24 - 20 = 4$$
$$|A \cap \overline{P} \cap \overline{G}| = |A| - |A \cap P \cap \overline{G}| - |A \cap \overline{P} \cap G| - |A \cap P \cap G| = 27 - 4 - 2 - 10 = 1$$
$$|G \cap \overline{A} \cap \overline{P}| + |G \cap \overline{A} \cap P| + |P \cap \overline{A} \cap \overline{G}| = |\overline{A}| = 33 - |A| = 6 \qquad (1)$$
$$|G \cap \overline{A} \cap \overline{P}| + |G \cap \overline{A} \cap P| = 26 - 22 = 4 \qquad (2)$$
$$|P \cap \overline{A} \cap \overline{G}| + |P \cap \overline{A} \cap G| = 29 - 24 = 5 \qquad (3)$$

En considérant $(1) - (2)$ cela donne

$$|P \cap \overline{A} \cap \overline{G} = 2$$

En considérant $(1) - (3)$ cela donne

$$|G \cap \overline{A} \cap \overline{P} = 1$$

et ainsi

$$|G \cap \overline{A} \cap P| = 3$$

Etant en situation d'équiprobabilité, on en déduit que

1. $P(P \cup G) = \dfrac{32}{33}$
2. $P(P \cap G) = \dfrac{23}{33}$
3. $P(A \cap \overline{G} \cap \overline{P}) = \dfrac{1}{33}$

$\boxed{\textbf{résolution 10}}$

résolution 11

$\boxed{\textbf{résolution 12}}$