Changement de repère (1A)

exercice 1

Dans le repère , on considère

- *le plan* P *d'équation* $x+y-3z=5$
- *le point* Ω *de coordonnées* $(5{,}3{,}1)$

Déterminer l'équation de P *dans le repère*

exercice 2

Dans le repère , on considère

- *le plan* P *d'équation* $4x+2y-2z=5$
- *les vecteurs*

$$\overrightarrow{I} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{}{2}\vec{k} \qquad \overrightarrow{J} = \overrightarrow{j} \qquad \overrightarrow{K} = \frac{-}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}$$

Déterminer l'équation de P *dans le repère*

exercice 3

Dans le repère , on considère

- *la courbe* C *de représentation paramétrique* $\begin{cases} x &= -.t+t^2 \\ y &= 1+t \\ z &= t+.t^2 \end{cases}$
- *les vecteurs*

$$\overrightarrow{I} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{}{2}\vec{k} \qquad \overrightarrow{J} = \overrightarrow{j} \qquad \overrightarrow{K} = \frac{-}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}$$

Déterminer l'équation de P *dans le repère*

exercice 4

Dans le repère , on considère

1. *la surface* S *d'équation* $y^2-3z^2-4xz+x+2z=0$
2. *les vecteurs*

$$\overrightarrow{I} = \frac{2\vec{i}-\vec{k}}{\sqrt{5}} \qquad \overrightarrow{J} = \vec{j} \qquad \overrightarrow{K} = \frac{\vec{i}+2\vec{k}}{\sqrt{5}}$$

   Déterminer l'équation de S *dans le repère*

exercice 5

exercice 6

Solutions

$\boxed{\textbf{résolution 1}}$

- On a noté (x,y,z) les coordonnées dans le repère
- Notons (X,Y,Z) les coordonnées dans le repère
- La formule de changement de repère par simple changement d'origine donne

$$\begin{cases} X &= x - x_\Omega = x - 5 \\ Y &= y - y_\Omega = y - 3 \\ Z &= z - z_\Omega = z - 1 \end{cases} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \begin{cases} x &= X + 5 \\ y &= Y + 3 \\ z &= Z + 1 \end{cases}$$

- L 'équation de P dans est donc

$$(X + 5) + (Y + 3) - 3(Z + 1) = 5$$

c'est à dire

$$X + Y - 3Z = 0$$

résolution 2 • On a noté (x,y,z) les coordonnées dans le repère

- Notons (X,Y,Z) les coordonnées dans le repère
- La matrice de passage de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à la base $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$ est $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- La formule de changement de repère par changement de base donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X-Z}{2} \\ Y \\ \frac{X+Z}{2} \end{pmatrix}$$

- En substituant cela donne

$$4x + 2y - 2z = 2(X - Z) + 2Y - (X + Z) = (2-)X + 2Y - (2+1)Z$$

- L'équation du plan dans est donc

$$(2-)X + 2Y - (2+1)Z = 5$$

$\boxed{\textbf{résolution 3}}$ • On a noté (x,y,z) les coordonnées dans le repère

- Notons (X,Y,Z) les coordonnées dans le repère

- La matrice de passage de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à la base $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$ est $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

  Comme la base $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$ est visiblement une base orthonormée, la matrice P est une matrice orthogonale car matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.

- La formule de changement de repère par changement de base donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

  et donc

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^{-1}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =^t P.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Le calcul donne

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -.t + t^2 \\ 1+t \\ t + .t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 1+t \\ 2t \end{pmatrix}$$

  La représentation paramétrique de C dans le nouveau repère est donc

$$\begin{cases} X &= 2t^2 \\ Y &= 1+t \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ Z &= 2t \end{cases}$$

résolution 4

- On a noté (x,y,z) les coordonnées dans le repère
- Notons (X,Y,Z) les coordonnées dans le repère
- La matrice de passage de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à la base $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$ est $P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$
- La formule de changement de repère par changement de base donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2X+Z}{\sqrt{5}} \\ Y \\ \dfrac{-X+2Z}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

- En substituant cela donne

$$\begin{aligned} y^2 - 3z^2 - 4xz + x + 2z &= Y^2 - 3\left(\frac{-X+2Z}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{2X+Z}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-XX+2Z}{\sqrt{5}}\right) + \frac{2X+Z}{\sqrt{5}} + 2\frac{-X+2Z}{\sqrt{5}} \\ &= X^2 + Y^2 - 4Z^2 + \sqrt{5}Z \end{aligned}$$

- L'équation du plan dans est donc

$$X^2 + Y^2 - 4Z^2 + \sqrt{5}Z = 0$$

$\boxed{\textbf{résolution 5}}$

résolution 6