Changement de repère 2D

exercice 1 (*)

Dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$, on considère
- *la droite (D) d'équation $2x - y - 5 = 0$.*
- *le point Ω de coordonnées $(2, -1)$*

Donner l'équation de (D) dans le repère $\mathcal{R}(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

exercice 2 (*)

Dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$, on considère
- *la courbe (C) de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 1 + 2\cos(t) \\ y &= -2 + 4\sin(t) \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$*
- *le point Ω de coordonnées $(1, -1)$*

Donner une représentation paramétrique de (C) dans le repère $\mathcal{R}(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

exercice 3 (*)

Dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$, on considère
- *la courbe (C) d'équation cartésienne $x^2 - xy + 6x - y + 5 = 0$.*
- *le point Ω de coordonnées $(-1,3)$*

Donner l'équation de (C) dans le repère $\mathcal{R}(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.
remarque: on peut alors en déduire la nature géométrique de (C) !

exercice 4 (*)

Dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$, on considère
- *la droite (D) d'équation $x - y - \sqrt{2} = 0$.*
- *les vecteurs $\overrightarrow{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$*

Donner l'équation de (D) dans le repère

exercice 5 (*)

Dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$, on considère
- *la courbe (C) de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= -1 + t - 2\sqrt{3}t^2 \\ y &= -\sqrt{3} + \sqrt{3}t + 2t^2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$*
- *les vecteurs $\overrightarrow{I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{}{2}\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{J} = -\frac{}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}$*

Donner une représentation paramétrique de (C) dans le repère
remarque: on peut alors en déduire la nature géométrique de (C) !

exercice 6 (*)

Dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$, on considère

- *la courbe (C) d'équation cartésienne $y = \sin(x+y)$*
- *les vecteurs $\overrightarrow{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$*

Donner l'équation cartésienne de (C) dans le repère

exercice 7 (**)

Dans le repère orthonormé $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$, on considère

- *la courbe (C) d'équation cartésienne $2xy - 2y - 1 = 0$*
- *le point Ω de coordonnées $(1,0)$*
- *les vecteurs les vecteurs $\overrightarrow{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$*

Déterminer l'équation cartésienne de (C) dans le repère

exercice 8

exercice 9

Solutions

résolution 1

- On a noté (x,y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$.
- Notons (X,Y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.
- La formule de changement de repère par simple changement d'origine donne

$$\begin{cases} X & = x - x_\Omega = x - 2 \\ Y & = y - y_\Omega = y + 1 \end{cases} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \begin{cases} x & = X + 2 \\ y & = Y - 1 \end{cases}$$

- L'équation de (D) dans $\mathcal{R}(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ est donc

$$2(X+2) - (Y-1) - 5 = 0 \qquad \text{c'est à dire} \qquad 2X - Y = 0$$

résolution 2

- On a noté (x,y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$.
- Notons (X,Y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.
- La formule de changement de repère par simple changement d'origine donne

$$\begin{cases} X & = x - x_\Omega = x - 1 \\ Y & = y - y_\Omega = y + 1 \end{cases}$$

- Une représentation paramétrique de (C) dans $\mathcal{R}(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ est donc

$$\begin{cases} X & = 1 + 2\cos(t) - 1 \\ Y & = -2 + 4\sin(t) + 1 \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} X & = 2\cos(t) \\ Y & = -1 + 4\sin(t) \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

résolution 3 • On a noté (x,y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$.

- Notons (X,Y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.

- La formule de changement de repère par simple changement d'origine donne

$$\begin{cases} X & = x - x_\Omega = x + 1 \\ Y & = y - y_\Omega = y - 3 \end{cases} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \begin{cases} x & = X - 1 \\ y & = Y + 3 \end{cases}$$

- En substituant, on trouve

$$x^2 - xy + 6x - y + 5 = (X-1)^2 - (X-1)(Y+3) + 6(X-1) - (Y+3) + 5 = X^2 - XY + X$$

$\boxed{\text{Conclusion: l'équation de } (C) \text{ dans } \mathcal{R}(\Omega,\vec{i},\vec{j}) \text{ est } X^2 - XY + X = 0}$

- remarque:
  - On a

$$X^2 - XY + X = 0 \iff X(X - Y + 1) = 0 \iff \begin{cases} \qquad X = 0 \\ \text{ou} \\ \qquad X - Y + 1 = 0 \end{cases}$$

    (C) est donc la réunion de deux droites sécantes: celle d'équation $X = 0$ et celle d'équation $X - Y + 1 = 0$

  - En revenant dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$, comme $X = x + 1$ et $Y = y - 3$, on a prouvé que (C) est la réunion de deux droites sécantes: celle d'équation $x = -1$ et celle d'équation $x - y + 5 = 0$

résolution 4 • On a noté (x,y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$.

- Notons (X,Y) les coordonnées dans le repère .
- La matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ à la base $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ est $P = \begin{pmatrix} & - \\ & \end{pmatrix}$
  Comme cette matrice est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée, on sait que P est une matrice orthogonale (et donc $P^{-1} = {}^tP$)
- La formule de changement de repère par changement de base donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & - \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{X-Y}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- En substituant, cela donne

$$x - y - \sqrt{2} = \frac{X-Y}{\sqrt{2}} - \frac{X+Y}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = -\sqrt{2}.Y - \sqrt{2} = -\sqrt{2}.(Y+1)$$

- $\boxed{\text{L'équation de } (D) \text{ dans est donc } Y+1=0, \text{ soit } Y=-1}$

résolution 5 • On a noté (x,y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$.

- Notons (X,Y) les coordonnées dans le repère .
- La matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ à la base $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ est $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{}{2} \\ \frac{}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

  Comme cette matrice est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée, on sait que P est une matrice orthogonale (et donc $P^{-1} = {}^tP$)
- La formule de changement de repère par changement de base donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \qquad \text{et ainsi} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{}{2} \\ -\frac{}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{-x+y}{2} \end{pmatrix}$$

  Or

$$x + y = -1 + t - 2\sqrt{3}t^2 + ract(-\sqrt{3} + \sqrt{3}t + 2t^2) = \cdots = 4t - 4$$

  et

$$-x + y = -(-1 + t - 2\sqrt{3}t^2) + (-\sqrt{3} + \sqrt{3}t + 2t^2) = \cdots = 8t^2$$

- Une représentation paramétrique de (C) dans est ainsi

$$\begin{cases} X &= 2t - 2 \\ Y &= 4t^2 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

- remarque:
  Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$\begin{cases} X &= 2t - 2 \\ Y &= 4t^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t &= \frac{X}{2} + 1 \\ Y &= 4t^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t &= \frac{X}{2} + 1 \\ Y &= 4\left(\frac{X}{2} + 1\right)^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t &= \frac{X}{2} + 1 \\ Y &= X^2 + 4X + 4 \end{cases}$$

  Cette dernière égalité prouve que (C) est **incluse** dans la parabole d'équation $Y = X^2 + 4X + 4$.

  Comme $t \mapsto 2t - 2$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que X décrit $\mathbb{R}$ tout entier, et ainsi

$$(C) \text{ est la parabole d'équation } Y = X^2 + 4X + 4 \text{ dans le repère}$$

résolution 6

- On a noté (x,y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$.
- Notons (X,Y) les coordonnées dans le repère .
- La matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ à la base $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ est $P = \begin{pmatrix} & - \\ & \end{pmatrix}$
  Comme cette matrice est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée, on sait que P est une matrice orthogonale (et donc $P^{-1} = {}^tP$)
- La formule de changement de repère par changement de base donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & - \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{X-Y}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- En substituant cela donne

$$y = \sin(x+y) \iff \frac{X+Y}{\sqrt{2}} = \sin(X) \iff Y = -X + .\sin(.X)$$

- $\boxed{\text{Conclusion: l'équation cartésienne de } (C) \text{ dans } \text{ est } Y = -X + .\sin(.X)}$

résolution 7 • Il s'agit de faire deux changements de repère successifs.

- Notons:
  - (x,y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$
  - (x_1,y_1) les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(\Omega,\vec{i},\vec{j})$
  - (X,Y) les coordonnées dans le repère

- La formule de changement de repère par simple changement d'origine donne

$$\begin{cases} x_1 & = x - 1 \\ y_1 & = y - 0 \end{cases}$$

- La matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ à la base $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ est $P = \begin{pmatrix} & - \\ & \end{pmatrix}$

- La formule de changement de repère par changement de base donne

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & - \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{X - Y}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{X + Y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- On en déduit ainsi que

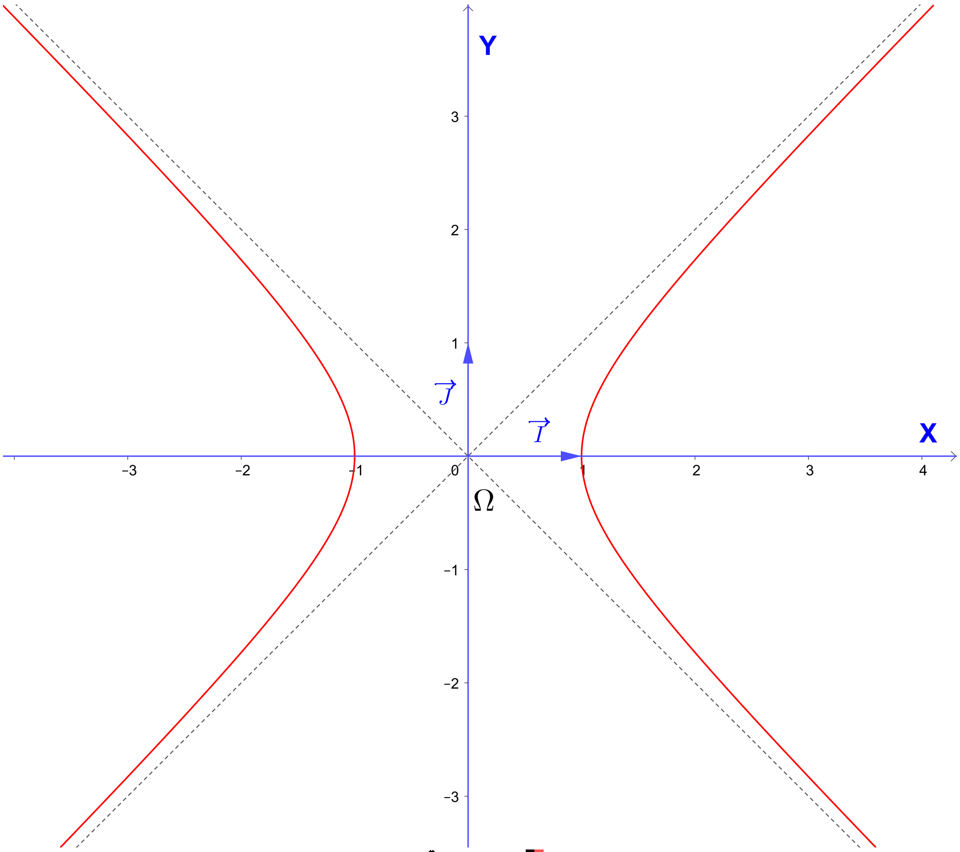
$$\begin{cases} x & = 1 + \dfrac{X - Y}{\sqrt{2}} \\ y & = 0 + \dfrac{X + Y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

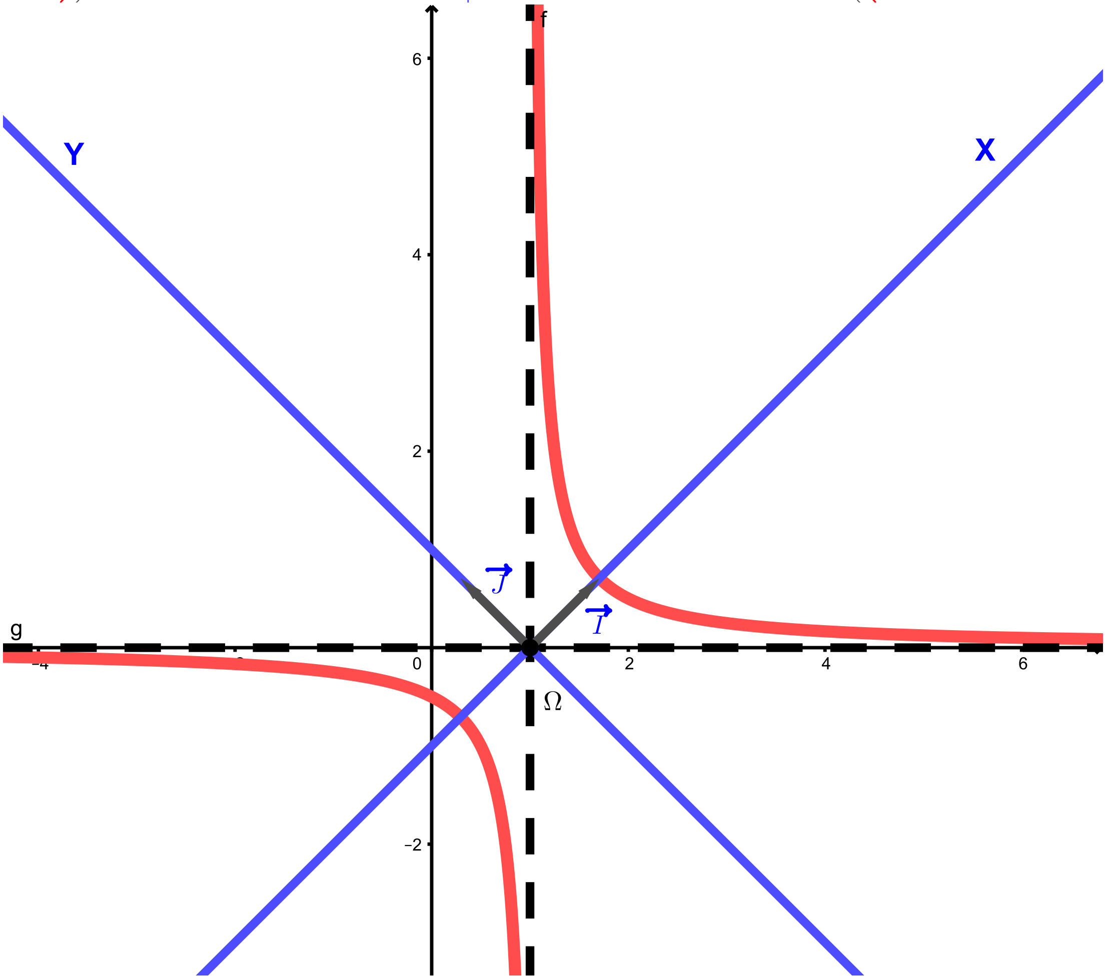
- En substituant, cela donne

$$2xy - 2y - 1 = \cdots = X^2 - Y^2 - 1 = 0$$

$\boxed{\text{Conclusion: l'équation de } \mathcal{C} \text{ dans est } X^2 - Y^2 = 1}$

- remarque: on reconnait l'équation cartésienne d'une hyperbole (équilatère) !


Y
3
2
1
$\overrightarrow{J}$
$\overrightarrow{I}$
X
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
Ω
-1
-2
-3


f
6
4
2
-2
Y
X
$\overrightarrow{J}$
$\overrightarrow{I}$
g
0
2
4
6
Ω

$\boxed{\textbf{résolution 8}}$

$\boxed{\textbf{résolution 9}}$