bases

exercice 1 (*)

Déterminer une base de $F = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a + 2b = 0\}$

exercice 2 (*)

Déterminer une base de $F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a + 2b = 0\}$

exercice 3 (*)

Déterminer une base de $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \,|\, P(1) = 0\}$

exercice 4 (*)

Déterminer une base de $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = 0\}$

exercice 5 (*)

On note F *le sev engendré par les vecteurs* $e_1 = (1,2,1,0) \quad e_2 = (2,-1,1,1)$ *et* $e_3 = (-1,8,1,-2)$
Déterminer une base de F.

exercice 6 (**)

On note F *le sev engendré par les 5 vecteurs suivants*

$$e_1 = (1,1,1,1) \quad e_2 = (1,2,1,0) \quad e_3 = (0,-1,1,1) \quad e_4 = (2,2,3,2) \quad e_5 = (-0,2,-1,-2)$$

Déterminer une base de F

exercice 7 (***)

On considère les 3 fonctions suivantes

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(2x) \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(3x) \end{array}$$

Déterminer une base de F, *le sev engendré par* (f,g,h)

exercice 8 (***)

On considère les 3 fonctions suivantes

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(2x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(2x) \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{array}$$

Déterminer une base de F, *le sev engendré par* (f,g,h)

exercice 9

exercice 10

Solutions

résolution 1

- On a

$$\begin{aligned} F &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a + 2b = 0\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = -2b\} \\ &= \{(-2b,b) \mid b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b(-2,1) \mid b \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{vect}((-2,1)) \end{aligned}$$

- $\boxed{F \text{ est donc la droite vectorielle dirigée par le vecteur } (-2,1)}$

résolution 2

- On a

$$\begin{aligned} F &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 2b = 0\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = -2b\} \\ &= \{(-2b,b,c) \mid (b,c) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{b(-2,1,0) + c(0,0,1) \mid (b,c) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{vect}((-2,1,0),(0,0,1)) \end{aligned}$$

  Ainsi F est le sev engendré par les vecteurs $(-2,1,0)$ et $(0,0,1)$

- Les deux vecteurs précédents étant clairement non colinéaires, on peut affirmer qu'ils constituent une famille libre.

  $\boxed{F \text{ est donc un sev qui a pour base } ((-2,1,0),(0,0,1))}$

  F est ainsi un plan vectoriel

résolution 3 – On a

$$\begin{aligned}
F &= \{P \in \mathbb{R}_2[X] \,|\, P(1) = 0\} \\
&= \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \,|\, a + b + c = 0\} \\
&= \{aX^2 + bX + c \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } c = -a - b\} \\
&= \{aX^2 + bX - a - b \,|\, (a,b)) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{a(X^2 - 1) + b(X - 1) \,|\, (a,b)) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \mathrm{vect}(X^2 - 1, X - 1)
\end{aligned}$$

Ainsi F est le sev engendré par les polynômes $X^2 - 1$ et $X - 1$.

– La famille $(X^2-1, X-1)$ est une famille libre car *c'est une famille de polynômes de degrés distincts deux à deux et ne contenant pas le polynôme nul.* (argument classique à connaître)
On en déduit que $\boxed{(X^2 - 1, X - 1) \text{ est une base de } F}$

résolution 4 – On a

$$\begin{aligned} F &= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = 0\} \\ &= \{aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, a + b + c + d = 0\} \\ &= \{aX^2 + bX^2 + cX + d \,|\, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ et } d = -a - b - c\} \\ &= \{aX^3 + bX^2 + cX - a - b - c \,|\, (a,b,c)) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{a(X^3 - 1) + b(X^2 - 1) + c(X - 1) \,|\, (a,b,c)) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{vect}(X^3 - 1, X^2 - 1, X - 1) \end{aligned}$$

Ainsi F est le sev qui a pour famille génératrice $(X^3 - 1, X^2 - 1, X - 1)$

– La famille $(X^3 - 1, X^2 - 1, X - 1)$ est une famille libre car *c'est une famille de polynômes de degrés distincts deux à deux et ne contenant pas le polynôme nul.* (argument classique à connaître)
On en déduit que $\boxed{(X^3 - 1, X^2 - 1, X - 1) \text{ est une base de } F}$

résolution 5 – Par définition, (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de F.

– Etudions si cette famille est libre.

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a.e_1 + b.e_2 + c.e_3 = 0$
on a ainsi

$$a(1,2,1,0) + b(2,-1,1,1) + c(-1,8,1,-2) = 0$$

ce qui aboutit au système $\begin{cases} a + 2b - c & = 0 \\ 2a - b + 8c & = 0 \\ a + b + c & = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases}$

dont la résolution donne $\begin{cases} a & = -3c \\ b & = 2c \end{cases}$

Ce calcul montre que:

i) *la famille* (e_1, e_2, e_3) *n'est pas libre*(car on n'aboutit pas à $a = b = c = 0$

ii) e_3 *est combinaison linéaire de* e_1 *et* e_2.
En effet, en prenant $c = 1$ et donc $(a,b) = (-3,2)$
cela donne $-3e_1 + 2e_2 + e_3 = 0$, c'est-à-dire $e_3 = 3e_1 - 2e_2$

– La famille (e_1,e_2) est clairement une famille libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Conclusion $\boxed{(e_1,e_2) \text{ est une base de } F}$

$\boxed{\textbf{résolution 6}}$ – On sait (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) est une famille génératrice de F

- **première solution:** on effectue des transformations élémentaires sur ***les colonnes*** de la matrice de la famille de vecteurs.

  On considère donc la marice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

  En effectuant les transformations $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$ et $C_4 \longleftarrow C_4 - 2C_1$, on obtient

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  Puis en effectuant $C_3 \longleftarrow C_3 + C_2$ et $C_5 \longleftarrow C_5 - 2C_3$, on obtient

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Enfin, on effectue $C_4 \longleftarrow C_4 - C_3$ et $C_5 \longleftarrow C_5 + C_3$, et cela donne

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  On en conclut donc que $\boxed{((1,1,1,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,0)) \text{ est une base de } F}$

- **seconde solution:**

  On considère la combinaison linéaire $a.e_1 + b.e_2 + c.e_3 + d.e_4 + f.e_5 = 0\,(*)$ avec $(a,b,c,d,f) \in \mathbb{R}^5$

  Ce qui donne le système

  $$\begin{cases} a + b + 2d & = 0 \\ a + 2b - c + 2d + 2f & = 0 \\ a + b + c + 3d - f & = 0 \\ a + c + 2d - 2f & = 0 \end{cases}$$

  dont la résolution, que je ne détaille pas ici, donne

  $$\begin{cases} a & = -d + f \\ b & = -d - f \\ c & = d - f \end{cases}$$

  A partir de là on peut en déduire successivement que

  a) e_4 est une combinaison linéaire de (e_1,e_2,e_3).
  En effet, pour $d = -1$ et $f = 0$ (et donc $a = b = 1$ et $c = -1$), on a $e_1 + e_2 - e_3 - e_4 = 0$, soit $e_4 = e_1 + e_2 - e_3$

b) e_5 est une combinaison linéaire de (e_1,e_2,e_3).
En effet, pour $d = 0$ et $f = -1$ (et donc $a = -1$ et $b = c = 1$), on a $-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 = 0$*,*
soit $e_4 = e_1 - e_2 - e_3$

c) A ce niveau, on sait que (e_1,e_2,e_3) est une famille génératrice de F.

d) Etudier la liberté de la famille (e_1,e_2,e_3) revient à considérer la combinaison linéaire (*) avec $d = f = 0$.
Or lorsque l'on se fixe $d = f = 0$, la résolution précédente prouve que $a = b = c = 0$.
On a prouvé que (e_1,e_2,e_3) est une famille libre

e) Conclusion: $\boxed{(e_1,e_2,e_3) \text{ est une base de } F}$

résolution 7 – Par définition, (f,g,h) est une famille génératrice de F

– Etudions si cette famille est libre.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a.f + b.g + c.h = 0$
On a donc

$$\text{pour tout } x \text{ réel } a.\cos(x) + b.\cos(2x) + c.\cos(3x) = 0.$$

On en déduit en prenant certaines valeurs de x un système vérifié par a, b et c.

- pour $x = 0$, cela donne $a + b + c = 0$
- pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, cela donne $-b = 0$
- pour $x = \dfrac{\pi}{6}$, cela donne $\frac{\sqrt{3}}{2}.a + \frac{1}{2}.b = 0$

On considère le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ & & -b & & & = & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}.a & + & \frac{1}{2}.b & & & = & 0 \end{array}\right.$$

dont l'unique solution est à l'évidence $a = b = c = 0$

On vient de montrer que (f,g,h) est une famille libre

– Conclusion: $\boxed{(f,g,h) \text{ est une base de } F}$

résolution 8

- Par définition, (f,g,h) est une famille génératrice de F

- D'après les formules de trigonométrie, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}.\sin(2x) + \sin\frac{\pi}{4}.\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sin(2x) + \frac{\sqrt{2}}{2}.\cos(2x)$$

  Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.g(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}.f(x)$$

  On vient de prouver que $h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.f + \dfrac{\sqrt{2}}{2}.g$
  Comme h est une combinaison linéaire de f et g, on en déduit que (f,g) est une famille génératrice de F

- Regardons si cette famille est libre.

  Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a.f + g.h = 0$
  On a donc pour tout x réel $a.\cos(2x) + b.\sin(2x) = 0$
  En particulier,
  - pour $x = 0$, cela donne $a = 0$
  - pour $x = \dfrac{\pi}{4}$, cela donne $b = 0$

  On a donc nécessairement $a = b = 0$

  On vient de montrer que (f,g) est une famille libre

- Conclusion: $\boxed{(f,g) \text{ est une base de } F}$

$\boxed{\textbf{résolution 9}}$

$\boxed{\textbf{résolution 10}}$