applications linéaires, noyau, image

exercice 1 (*)

Montrer que l'application $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P=P(X) & \longmapsto & P(X+1)+P(2).X^2 \end{array}}$ *est une application linéaire.*

exercice 2 (*)

Montrer que l'application $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & 2x+y-z \end{array}}$ *est une application linéaire, puis déterminer son noyau.*

exercice 3 (*)

Montrer que l'application $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (a,b) & \longmapsto & (a+b,a-b,2a) \end{array}}$ *est une application linéaire, puis déterminer son noyau et son image.*

exercice 4 (*)

Montrer que l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P+(1-X)P' \end{array}}$ *est une application linéaire, puis déterminer son noyau et son image*

exercice 5 (*)

Montrer que l'application $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & (a,b,c) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ c & -a \end{pmatrix} \end{array}}$ *est une application linéaire, puis déterminer son image et son noyau*

exercice 6 (*)

Montrer que l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & 2M-M^T \end{array}}$ *est une application linéaire, puis déterminer son noyau.*

exercice 7 (***)

Montrer que l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} f:C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & u''+u \end{array}}$ *est une application linéaire, puis déterminer son noyau.*

exercice 8

à suivre

Solutions

résolution 1 – Soient $(P_1,P_2,\lambda) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}$

Notons $P_3 = \lambda P_1 + P_2$.

On a

$$\begin{aligned}
f(\lambda P_1 + P_2) &= f(P_3) \\
&= P_3(X+1) + P_3(2).X^2 \\
&= (\lambda P_1 + P_2)(X+1) + (\lambda P_1 + P_2)(2).X^2 \\
&= \lambda P_1(X+1) + P_2(X+1) + \lambda P_1(2).X^2 + P_2(2)X^2 \\
&= \lambda(P_1(X+1) + P_1(2).X^2) + P_2(X+1) + P_2(2).X^2 \\
&= \lambda f(P_1) + f(P_2)
\end{aligned}$$

– On a bien montré que

$$\forall (P_1,P_2,\lambda) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}, f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$$

$\boxed{\textbf{résolution 2}}$ – Soient $u=(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{R}^3$, $v=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

On a $\lambda.u+v=\lambda.(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(\lambda x_1+x_2,\lambda y_1+y_2,\lambda z_1+z_2)$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(\lambda.u+v) &= f(\lambda x_1+x_2,\lambda y_1+y_2,\lambda z_1+z_2) \\ &= 2(\lambda x_1+x_2)+(\lambda y_1+y_2)-(\lambda z_1+z_2) \\ &= 2\lambda x_1+2x_2+\lambda y_1+y_2-\lambda z_1-z_2 \\ &= \lambda.(2x_1+y_1-z_1)+2x_2+y_2-z_2 \\ &= \lambda.f(u)+f(v) \end{aligned}$$

– On a bien montré que

$$\forall (u,v,\lambda)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}, f(\lambda.u+v)=\lambda f(u)+f(v)$$

– Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
On a les équivalences suivantes

$$u\in\ker(f)\iff f(u)=0\iff 2x+y-z=0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, 2x+y-z=0\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, z=2x+y\} \\ &= \{x,y,2x+y) \,|\, (x,y)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,0,2)+y(0,1,1) \,|\, (x,y,z)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \text{vect}((1,0,2),(0,1,1)) \end{aligned}$$

Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, on peut affirmer que $\ker(f)$ est le *plan* engendré par les vecteurs (1,0,2) et (0,1,1)

$\boxed{\textbf{résolution 3}}$

– Soient $\vec{x} = (a_1,b_1) \in \mathbb{R}^2, \vec{y} = (a_2,b_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Notons $\vec{z} = \lambda.\vec{x} + \vec{y} = \lambda.(a_1,b_1) + (a_2,b_2) = (\lambda.a_1 + a_2,\lambda.b_1 + b_2)$.

On a

$$\begin{aligned}
f(\lambda.\vec{x} + \vec{y}) &= f(\vec{z}) \\
&= f(\lambda.a_1 + a_2,\lambda.b_1 + b_2) \\
&= ((\lambda.a_1 + a_2) + (\lambda.b_1 + b_2), (\lambda.a_1 + a_2) - (\lambda.b_1 + b_2), 2(\lambda.a_1 + a_2)) \\
&= (\lambda.a_1 + a_2 + \lambda.b_1 + b_2, \lambda.a_1 + a_2 - \lambda.b_1 - b_2, 2\lambda.a_1 + 2a_2) \\
&= (\lambda.(a_1 + b_1) + a_2 + b_2, \lambda.(a_1 - b_1) + b_2 - a_2, \lambda(2a_1) + 2a_2) \\
&= \lambda(a_1 + b_1, a_1 - b_1, 2a_1) + (a_2 + b_2, a_2 - b_2, 2a_2) \\
&= \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y})
\end{aligned}$$

On a bien montré que

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \forall\lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda.\vec{x} + \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

– Soit $\vec{x} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$
On a les équivalences suivantes

$$\vec{x} \in \ker(f) \iff f(\vec{x}) = \vec{0} \iff (a+b,a-b,2a) = (0,0,0) \iff \begin{cases} a+b &= 0 \\ a-b &= 0 \\ 2a &= 0 \end{cases} \iff a = b = 0 \iff \vec{x} = (0,0)$$

On a prouvé que $\ker(f = \{\vec{0}\}$ *(rem: on peut alors affirmer que f est injective)*

– Première idée pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
On écrit

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(a,b) \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \{(a+b,a-b,2a)|(a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(1,1,2) + b(1,-1,0)|(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

On reconnait alors $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}((1,1,2),(1,-1,0))}$

– Seconde idée pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Im}(f) &\iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, f(a,b) = (x,y,z) \\
&\iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a+b &= x \\ a-b &= y \\ 2a &= z \end{cases} \iff \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a &= \dfrac{x+y}{2} \\ b &= \dfrac{x-y}{2} \\ x+y &= z \end{cases} \iff x+y = z
\end{aligned}$$

On écrit alors $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x+y-z = 0\}}$

remarque: $\mathrm{Im}(f)$ *est un plan: avec la première idée, on en trouve une base, avec la seconde on en trouve une équation.*

résolution 4 – Soient $(P_1,P_2,\lambda) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}$

Notons $P_3 = \lambda P_1 + P_2$.

On a

$$\begin{aligned}
f(\lambda P_1 + P_2) &= f(P_3) \\
&= P_3 + (1-X)P_3' \\
&= (\lambda P_1 + P_2) + (1-X)(\lambda P_1 + P_2)' \\
&= \lambda P_1 + P_2 + (1-X)(\lambda P_1' + P_2') \\
&= \lambda P_1 + P_2 + \lambda(1-X)P_1' + (1-X)P_2' \\
&= \lambda(P_1 + (1-X)P_1') + (P_2 + (1-X)P_2') \\
&= \lambda f(P_1) + f(P_2)
\end{aligned}$$

On a bien montré que

$$\forall (P_1,P_2,\lambda) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}, f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$$

– Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
On a les équivalences suivantes

$$P \in \ker(f) \iff f(P) = 0 \iff aX^2 + bX + c + (1-X)(2a+b) = 0 \iff -aX^2 + 2aX + b + c = 0$$

Or **un polynôme est le polynôme nul ssi tous ses coefficients sont nuls**
D'où

$$P \in \ker(f \iff \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \end{cases}$$

On trouve ainsi

$$\ker(f) = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_[X] | a = 0, c = -b\} = \{bX - b | b \in \mathbb{R}\} = \{b.(X-1) | b \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(X-1)$$

$\ker(f)$ est la droite vectoriel engéndré par $X - 1$

– On a

$$\begin{aligned}
\text{Im}(f) &= \{f(P) \,|\, P \in \mathbb{R}_2[X]\} \\
&= \{f(aX^2 + bX + c) \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{-aX^2 + 2aX + b + c \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{a(-X^2 + 2X) + (b+c).1 \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \text{vect}(-X^2 + 2X, 1) = \text{vect}(X^2 - 2X, 1)
\end{aligned}$$

Comme la famille $(X^2 - 2X, 1)$ est une famille de polynômes de degré distincts deux à deux et ne contenant pas le polynôme nul, on peut affirmer que cette famille libre.
Conclusion: $\text{Im}(f)$ est le plan engendré par les vecteurs $X^2 - 2X$ et 1

résolution 5 – Soit $x=(a_1,b_1,c_1)\in\mathbb{R}^3$, $y=(a_2,b_2,c_2)\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

On a $\lambda.x+y=\lambda.(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)=(\lambda a_1+a_2,\lambda b_1+b_2,\lambda c_1+c_2)$

Ainsi

$$\begin{aligned}
f(\lambda.x+y) &= f((\lambda a_1+a_2,\lambda b_1+b_2,\lambda c_1+c_2)\\
&= \begin{pmatrix} (\lambda a_1+a_2)-(\lambda b_1+b_2) & (\lambda b_1+b_2)-(\lambda c_1+c_2)\\ \lambda c_1+c_2 & -(\lambda a_1+a_2)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \lambda a_1+a_2-\lambda b_1-b_2 & \lambda b_1+b_2-\lambda c_1-c_2\\ \lambda c_1+c_2 & -\lambda a_1-a_2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \lambda(a_1-b_1)+(a_2-b_2) & \lambda(b_1-c_1)+(b_2-c_2)\\ \lambda c_1+c_2 & \lambda(-a_1)-a_2\end{pmatrix}\\
&= \lambda\begin{pmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1\\ c_1 & -a_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2-b_2 & b_2-c_2\\ c_2 & -a_2\end{pmatrix}\\
&= \lambda f(x)+f(y)
\end{aligned}$$

On a bien montré que

$$\forall x\in\mathbb{R}^3, \forall y\in\mathbb{R}^3, \forall\lambda\in\mathbb{R}, f(\lambda x+y)=\lambda f(x)+f(y)$$

– Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.
On a les équivalences suivantes

$$(a,b,c)\in\ker(f)\iff f(a,b,c)=0\iff\begin{pmatrix} a-b & b-c\\ c & -a\end{pmatrix}=0\iff\begin{cases} a-b &=0\\ b-c &=0\\ c &=0\\ -a &=0\end{cases}\iff a=b=c=0$$

Ainsi on a $\ker(f)=\{(0,0,0)\}$ *(rem: on peut alors affirmer que f est injective)*

– Première idée pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$
On écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \{f(a,b,c)\,|\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}\\
&= \{\begin{pmatrix} a-b & b-c\\ c & -a\end{pmatrix}\,|\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}\\
&= \{a\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\,|\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}\\
&= \mathrm{vect}(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix})
\end{aligned}$$

– Seconde idée pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$

Soit $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \in \mathrm{Im}(f) &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, f(a,b,c) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x &= a - b \\ y &= b - c \\ z &= c \\ t &= -a \end{cases} \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a &= -t \\ b &= -x - t \\ c &= z \\ y &= (-x - t) - z \end{cases} \\
&\iff x + y + z + t = 0
\end{aligned}$$

On écrit alors

$$\mathrm{Im}(f) = \{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x + y + z + t = 0 \}$$

résolution 6 – Soient $M_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

Nous allons utiliser le fait que **la transposition est une application linéaire**

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} f(\lambda M_1 + M_2) &= 2(\lambda M_1 + M_2) - (\lambda M_1 + M_2)^T \\ &= 2\lambda M_1 + 2M_2 - (\lambda M_1^T + M_2^T) \\ &= 2\lambda M_1 + 2M_2 - \lambda M_1^T - M_2^T \\ &= \lambda(2M_1 - M_1^T) + 2M_2 - M_2^T \\ &= \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{aligned}$$

On a bien vérifié que

$$\forall M_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),, \forall M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{C}, f(\lambda M_1 + M_2) = \lambda f(M_1) + f(M_2)$$

– Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} M \in \ker(f) \iff f(M) = 0 &\iff 2M - M^T = 0 \\ &\iff 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \iff \begin{cases} a & = 0 \\ 2b - c & = 0 \\ 2c - b & = 0 \\ d & = 0 \end{cases} \\ &\iff a = b = c = d = 0 \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\ker(f) = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} = \{0\}$$

– *Comme le noyau est réduit au vecteur nul, on peut en déduire que f est injective*

– *Comme f est un endomorphisme d'un ev de dimension finie qui a son noyau réduit au vecteur nul, on peut même affirmer que f est bijective (et que c'est donc un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$)*

résolution 7 – Soient $u \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}), v \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Nous allons utiliser le fait que **la dérivation est une application linéaire**

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (\lambda u + v)'' + (\lambda u + v) \\ &= \lambda u'' + v'' + \lambda u + v \\ &= \lambda(u'' + u) + (v'' + v) \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

On a bien vérifié que

$$\forall u \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall v \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

– Soit $u \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On a les équivalences suivantes

$$u \in \ker(f) \iff f(u) = 0 \iff u'' + u = 0$$

On sait que la solution générale de l'équation différentielle $u'' + u = 0$
est $u = A.\cos + B.\sin$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ quelconque.

On a donc

$$u \in \ker(f) \iff \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, u = A.\cos + B.\sin$$

On trouve ainsi

$$\ker(f) = \text{vect}(\cos\,,\ \sin)$$

$\boxed{\textbf{résolution 8}}$